選択公理と数学【増訂版】

発生と論争，そして確立への道

田中尚夫 著

発行 遊星社

序　　文

選択公理については，数学に関心のある方なら必ずや多少の“思い出”をおもちのことであろう．筆者は大学院生のとき，これについて強い印象をもったことがあり，今でも――内容は忘れてしまったが――そのときの選択公理だけは頭に残っている．著者が数学基礎論屋だから，選択公理への印象が強いのは当たり前であろうと思われるかもしれないが，実はそれは数学基礎論以外の場で起こったことなのである．あるとき代数学の集中講義があって，講義が進むうちにある定理のところへきた．こんな定理はどんなふうに証明するのだろう，難しいだろうなあ，とその次の言葉を一瞬期待して待っていると，先生は「これは選択公理によって並べてしまえばよい」と，いとも簡単に述べられた．あ！なるほどそうか！　しかしこれを並べるなんて，ひどいことをするものだと驚き，選択公理はこんなふうに使われるものなのか，強力な手段であるなと感心した次第である．定理の内容をすっかり忘れてしまって，再現できないのが残念である．（聞くところによると，今日の代数学ではツォルンの補題なしにはほとんど何もできず，そしてそれを必要とする場面で選択公理や整列定理の形のものが使われることはめったにないということで，私の体験は珍しいことのようである．）

本書の執筆を依頼されたとき，選択公理の専門家でもない筆者がこれをお引き受けしたのは，このような“思い出”があったことや，「可算個の可算集合の和集合は，可算集合である」という定理の証明に選択公理が必要であるという記事をみて，ちょっと不思議に思ってその証明を考えたことなどが頭の隅にあったので，これは少し調べて書いてみたら面白かろうと不遜な心を抱いたか

らである．しかし，でき上がりはなんとも舌足らずな，哲学のないものになってしまい期待にそえず，そんな心をもったことに恐縮している次第である．読者のみなさんからの御批判をいただければ幸甚です．

さて，本書の構成は次のようになっている．序章は選択公理の提示と，普通の数学におけるその使用例の列挙である．第1章で素朴集合論の起源とその概略を説明する．この章はまさしく尻切れトンボである——本書が集合論そのものを展開する本ではないからである．第2章で，ツェルメロによる整列定理の証明を紹介する．そこで史上初めて選択公理が登場したわけである．さまざまな論争がなされたが，ここでは特に当時のフランス新進気鋭の数学者たちが交わした“五つの手紙”を翻訳した．第3章は，一般の数学の初等的部分で証明に選択公理を必要とする定理のいくつかを取り上げ，詳しい証明と共に紹介する．選択公理が使用された場所には左方欄外に♯印をつけて注意を喚起した．「実体は順序体である」というアルティン－シュライアーの定理は，一般の選択公理より真に弱い仮定から導かれる．これはちょっと好事家向きかもしれないが，その証明を紹介した．第4章は，選択公理が今日万人に認められている集合論公理系 ZF と無矛盾かつ独立であることの証明で，かなり詳しく書いたつもりである．付録として，述語論理の体系と超限帰納法による定義とを明確に述べ，また無限ゲームに関する決定性公理について触れた．この公理は選択公理を否定する命題として知られている．さらに，本書で述べた諸命題の相互関係をダイヤグラムで示して便宜をはかった．

執筆に際し，何人かの方々および多くの書物や論文のお世話になった．特に早稲田大学数学教室の草間時武教授にはドイツ語についての多くの有益な御教示に対し御礼申し上げる．また，筑波大学数学教室の塚田信高氏は全原稿を読んで多くの有益な御注意をくださった．同氏にたいへん感謝しています．おしまいに，遊星社の西原昌幸氏には原稿の遅れでご迷惑をおかけし，また出版に際したいへんお世話になった．ここに感謝の意を表します．

1987年3月　　　　　　　　　　著　者

目　次

序文 …… 3

序章　選択公理 …… 7

第1章　集合論 …… 12

§1　集合論の始まり …… 12

§2　素朴集合論 …… 18

§3　論理演算と集合算 …… 23

§4　1対1対応と濃度 …… 26

§5　可算集合のいくつかの性質 …… 33

§6　非可算集合 …… 37

§7　整列集合と順序数 …… 41

第2章　選択公理の出現 …… 48

§8　基数の整列の問題 …… 48

§9　ツェルメロの証明 …… 52

§10　ツェルメロの証明に対する反応 …… 58

§11　集合論に関する五つの手紙 …… 63

§12　現在の立場から …… 78

第3章　選択公理と数学 …… 87

§13　解析学に現れる選択公理 …… 87

§14　集合論に現れる選択公理 …… 94

§15　位相数学と選択公理 …… 101
§16　位相数学と極大原理 …… 113
§17　関数解析学と選択公理 …… 123
§18　代数学に現れる選択公理 …… 131
§19　第3章の結び …… 143

第4章　選択公理の無矛盾性と独立性 …… 149
§20　公理的集合論 …… 149
§21　構成可能性公理と選択公理，その無矛盾性 …… 161
§22　選択公理の独立性 …… 173
§23　生成的拡大 …… 189
§24　強制法 …… 201
§25　選択公理の独立性証明 …… 207

付録 …… 215
§26　述語論理の体系 …… 215
§27　帰納法による定義 …… 220
§28　決定性公理 …… 221

命題リスト …… 224
ダイヤグラム …… 225

補遺 …… 226

参考文献 …… 247

増補版あとがき …… 252
増訂版あとがき …… 253
人名表 …… 254
記号表 …… 256
索引 …… 258

序章　選択公理

集合論を学び始めると間もなく可算集合の概念が現れ，「無限集合は可算無限部分集合を含む」という定理が証明される．その証明は，次のように述べられることが多い：

M を無限集合とする．M は空でないので，なにか一つ要素をとって a_1 と名づける．M は無限集合なので $M-\{a_1\}$ は空でないから，これから一要素 a_2 を取り出す．明らかに $a_2 \neq a_1$．$M-\{a_1, a_2\}$ も空でないから，この中から一要素 a_3 を取り出すと，a_3 は a_1, a_2 と異なる M の要素である．M は無限集合であるからこの操作を次々にくり返すことができて，M の異なる要素の列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ が得られる．$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ は M の可算無限部分集合である．

以上がその証明である．しかし，読者はこの証明を講義で聞いたりあるいは本で読んだとき，なんだこれが証明か？ これで証明になっているのだろうか？と疑問をもたれたのではないかと思う．しかし筆者は当時幼稚で，初めてこの定理に接しその証明を読んだとき，それがあまりにも明々白々な議論にみえ，つまらないことを仰々しく定理として掲げたものだなあと感じてしまった．読んだ本の該当の箇所には**選択公理**（Axiom of Choice）にふれるものだなどという記載はなく，あの A が“集合”をなすか？ などという疑問は全く浮かんでこなかったのである．

この証明が実は暗々裡に選択公理を使っているのだと筆者が気づいたのは，ずっと後のことである．上記の A が集合として存在することは，選択公理によって初めて保証される事柄である．しかし，うっかり見すごしてしまえばその

ままになってしまうような事柄でもある．そのような状況は数学の議論にしばしば現れるので，注意するに及くはない．意外なところに選択公理が暗々俚に使われているのである．読者はすぐ後で述べられる例の中のいくつかに，そのような意外性を感じられることと思う．

そこで，選択公理をめぐっていろいろなお話をしよう，というのが本書の目的である．問題の性質上“お話”ばかりでなく“証明”を述べることもしばしばあるであろう．もし輪郭だけに興味のある読者は，大部分の証明を省いて進むことができよう．証明の始まりに＊印を，終わりに⁑印を，また途中で選択公理が関わるところに♯印を（欄外左側に）つけて見やすくしておいた．

本論に入る前にしばしば選択公理という言葉が紙上を賑わすので，ここにそれを述べておこう．それはいろいろな形で記述できるが，ここではツェルメロが初めて集合論の公理を発表した論文［59］の中で述べられた形で記す．

選択公理（Axiom der Auswahl） 集合 T の要素がすべて互いに共通部分のない空でない集合であれば，その和集合 $\bigcup T$ は次の条件をみたす部分集合 S_1 を少なくとも一つ含む：

S_1 は T に属する各集合とちょうど 1-要素を共有する．

この結論を後述の論理記号によって表すと，次のようになる：

$$\forall E\,[E\in T \Longrightarrow \exists!\,x(x\in E\wedge x\in S_1)].$$

これは

$$f:T\longrightarrow \bigcup T,\qquad E\in T\Longrightarrow f(E)\in E$$

なる関数 f の存在と同値である．f を T の**選択関数**という．また，S_1 を T の**選択集合**という．

いまは，T が**共通部分のない**空でない**集合**からなっていると仮定したが，この制約があると使いにくいことがある．実は，この選択公理があれば，これから“共通部分のない”という条件を撤去しても選択関数の存在を証明することができる．したがって上述の選択公理は，T が単なる空でない集合の集合であ

る場合に適用してよい.

さて，数学一般の初等的な部分で選択公理が関係する命題は，意外にたくさんある．このうち主なものをいくつか拾いあげてみよう．それらに含まれる用語などの説明は，後の章で述べるつもりである.

（Ⅰ） **解析学**

（1） 連続関数に関するハイネの定義の同値性.

（2） ルベーグ測度の可算加法性．各自然数 k に対し $\mathscr{I}_k$ を開区間たちのある集合とするとき，$I_k \in \mathscr{I}_k$ となる区間列 $\{I_k \mid k=0,1,2,\cdots\}$ を選出する.

（3） 非可測集合の存在.

（ルベーグ測度の存在そのものに関係する（2）の中にすでに選択公理が入りこんでいるのだから，その概念を使用する非可測集合の存在にわざわざ選択公理が必要と述べるのは，屋上屋を重ねることになり無駄ではないかと思われるかもしれない．しかし，（3）を明記するのは実は意味のあることなのである．それは選択公理の使用法（あの T の複雑さ）の相異に関係する問題であり，後の章で詳しく述べる予定である.）

（Ⅱ） **集合論**

（1） 無限集合は，可算無限集合を部分集合として含む.

（2） 無限に対するデデキントの定義.

（3） 可算集合の可算個の和は可算集合である.

（Ⅲ） **位相数学**

（1） 実数空間において，閉包の点列極限による定義の同値性.

（2） 第1類（痩せ，meager）集合の可算個の和集合は，再び第1類集合である.

（3） チコノフの積定理：コンパクト位相空間の族から作られる積空間は，積位相に関しコンパクト位相空間となる.

（4） 可分距離空間の部分空間は，可分距離空間である.

(IV)　**関数解析学**

(1)　ベクトル空間は基底をもつ.

(2)　ハーン-バナッハの拡張定理：$\mathscr{R}$ を実数体とする．g が $\mathscr{R}$ 上のベクトル空間 V で定義された亜線形汎関数で，f が V の部分空間 W 上の線形汎関数であるとする．もし W 上で $f(x) \leq g(x)$ ならば，V 上の線形汎関数 F で，

すべての $x \in V$ に対し，$F(x) \leq g(x)$

すべての $x \in W$ に対し，$F(x) = f(x)$

となるものが存在する.

(V)　**代数学**

(1)　与えられた体に対し，その代数的閉包が一意的に存在する.

(2)　最大元をもつ非自明な束は，極大イデアルをもつ.

(3)　ブール代数は素イデアルをもつ.

(4)　ツォルンの補題(いくつかの形があるので，そのうちの一つ)：与えられた順序集合 M において，その任意の線形順序部分集合が上界をもつならば，M は極大要素をもつ.

ざっと見ただけでもこれだけの例がある．このほか，ボレル集合の性質に関わる諸問題，無限基数 $\mathfrak{m}$ に対する等式 $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$，ストーンの表現定理，順序体に関するアルティン-シュライアーの定理等々たくさんある．これらについては後の章で一部分ふれることもあるであろう.

読者はすでに集合論についてかなりの知識をもっていることと思うが，そうでない方や本書中での引用などのために，集合論の入門から話を始めることにする．そのような準備的事項がすんだところで，いよいよ選択公理という本題に入るわけである．その発端は基数の性質上の問題であったから，その話から始めることになるであろう．次に，ツェルメロによる整列定理の証明を紹介しよう．それは名前こそつけられてはいなかったが，実質的に選択公理に基づくものである．続いて，ツェルメロの証明に対する反応，特に当時のフランスの

新進数学者間の活発な意見交換，そしてツェルメロ自身の見解といったところを述べることになるであろう．

それ以降は各論であり，前に述べた諸々の例の解説，あるいはそれらの証明（全部に対してというわけにはいかないかもしれないが）を語る．また，興味深いハウスドルフの逆理やバナッハ-タルスキーの逆理にもふれたいと思う．おしまいに，有名な，選択公理と連続体仮説の無矛盾性に関するゲーデルの仕事の解説，数学界のノーベル賞と称されるフィールズ賞受賞の対象となったコーエンの独立性定理に関する業績の解説，無限ゲームについての決定性公理と選択公理の関係の解説などを述べるつもりである．

なお，いわゆる素朴集合論を書いた邦書は非常にたくさんあるので，本書の第1章集合論は，カントルの原典を少しく眺めながら解説ふうに展開したいと思う．

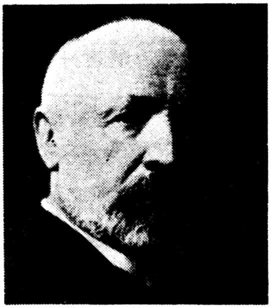
第1章　集 合 論

§1　集合論の始まり

集合論とは，もちろん集合を研究の対象とする学問であるが，その本質は無限の多様性の発見とその性質の解明にあると思う．このような集合論を創始したのは，ゲオルグ・カントルである．そこで，カントルのおいたちを特に前半生を簡単に述べ，集合論がどのようにして形成され始めたかをみてみよう．以下は，優れた集合論学者アドルフ・フレンケルによる“カントルの生涯”という記事［3］によった．

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor はペテルスブルクで1845年3月3日に生まれた．彼の父ゲオルク・ヴォルデマール・カントルはコペンハーゲンの出であるが，若いときペテルスブルクへやってきて，そこで仲買業の会社（Maklergeschäft）を始めた．彼の会社 Cantor & Co. は繁盛し，大きな財産を残したという．しかし，肺病のため一家は1856年ドイツへ移住し，まもなくフランクフルト・アム・マインに邸宅を構え，そこで金利生活を送った．我我のカントルの母の名はマリアで，実家の姓はベームといった．この家族は芸術の天分豊かな家系であった．マリアの祖父ルートヴィヒ・ベームは楽長（カペルマイスター）をつとめ，ルートヴィヒのウィーンに住む兄弟ヨゼフは，ブラームスと親交のあったあの有名なヴァイオリンの名手ヨゼフ・ヨアヒムの先生であり，またマリアの兄弟も音楽家，その姉妹アンネッテには女流画家の娘がある，という環境であった．カントル自身の同胞たちにも芸術的血統が顕著であった．彼の兄弟コンスタンチンは才能あるピアニストで，姉妹のゾフィー

は天分をもった図案家であった．



カントル

ペテルスブルクで小学校へ通っていたこの天分ある少年カントルは，すでに早い時期に数学の勉強をしたいという強い希望をもっていたが，父は同意せず技師のような生活のための学問にたずさわるように仕向けたのであった．息子は当初は父の意向に逆らわず，しばらくの間ヴィースバーデンのギムナジウムや，フランクフルト・アム・マインの私立学校へ通い，1859年ダルムシュタットの実科中学校のラテン語クラスに入った．1860年9月そこを修了（?）する際，次のような成績を得た．「数学：勤勉，模範的に熱心；三角法を含む初級数学の知識は非常によい．…… 幾何学：勤勉，注意深い，特別な achivements.」すぐ続いて，ダルムシュタットの高等実業学校（後の工業大学（Technische Hochschule））の一般課程へ移った．

1862年になってようやく，父はカントルの数学を修めたいというプランに同意した．カントルは同年5月25日付の父への手紙（これは保存されているカントルの手紙のうち最も古いものである），“私の親愛なパパ！……”で始まる手紙で，このことに感謝し非常に喜んでいる．父の死（1863年）の後，数学・物理学・哲学を勉強するためにベルリン大学へ赴いたが，そこには数学の三巨星，クンマー，ワイエルシュトラス，クロネッカーがいて大きな影響力を及ぼしていた．カントルはクロネッカーによって数論への興味をかきたてられたが，それにも増してカントルの学問的発展が多大な影響を受けたのはワイエルシュトラスからであった．その間，他大学へは——当時のドイツではいくつかの大学に出向いて聴講する習慣があった——ゲッチンゲン大学に短期間いただけで，大部分をベルリン大学で送った．

カントルはガウスの整数論などを深く研究し，1867年12月，不定方程式に関する論文によって学位を得，ベルリンでしばらく女学校の教師などをしながら数学の研究を続けた結果，1869年に3変数の2次形式に関する大学教師資格論文を完成し，これによってハレ（Halle）大学の私講師となることができた

(私講師というのは，講師ではあっても大学からの給与はなく，自分の講義の聴講生が払う聴講料だけが収入であるような身分である)．この2論文はラテン語で書かれている．当時，学位論文をラテン語で書かなければならない，という習慣があったわけではないと思う．たとえば，ヒルベルトの学位論文(1885年)はドイツ語で書かれている．カントルは，ラテン語クラスに在籍したためラテン語が得意だったので，そうしたのであろう．

それはさておき，このようにして初期のカントルの関心は整数論や代数学にあったと断定することができよう．ハレでは，カントルは1872年に助教授となり，1879年正教授となった．以後，1913年停年退職するまでハレ大学に留まっていた．

さて，1869年カントルがハレに赴任した当時のハレ大学数学正教授は，ハイネ-ボレルの被覆定理で知られるあのハイネであった．ハイネは即座に若い同僚カントルの異常な聡明さを見ぬき，自分の研究領域(三角級数論)にひき込んだ．彼がカントルに三角級数論研究への興味を起こさせたことは(後でわかるように)数学にとって決定的な意味をもつことになった！　カントルはさっそく翌1870年，三角級数に関する論文を書き[3; p.71]，その冒頭にこの研究はハイネによって関心を惹起されたものであると書き，三角級数についてのハイネの研究の手ほどきに感謝している．三角級数研究第2論文で，カントルは次のことを証明した：

定理 1.1　実変数 x の関数 $f(x)$ が，x の**すべての**値に対して収束する三角級数

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots\cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots\cdots$$

によって与えられるならば，すべての x の値に対し収束しかつ同じ関数 $f(x)$ を表すこのような級数は他には存在しない．

換言すれば，**すべての** x の値に対し収束する二つの三角級数

(1)　$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots\cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots\cdots$$

(2)　$\frac{1}{2}a_0' + (a_1'\cos x + b_1'\sin x) + \cdots\cdots + (a_n'\cos nx + b_n'\sin nx) + \cdots\cdots$

が同一の関数 $f(x)$ を表すならば，

$$a_n' = a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n' = b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

でなければならない，というのである．これは，関数の三角級数表現（あるいはフーリエ級数表現）の一意性問題に対する一つの解答を与えるものである．なお，この第2論文には有名な**ワイエルシュトラスの最大値定理**が引用されている．ワイエルシュトラスは彼の講義の中でこの定理を述べ証明したらしい．

カントルはさらにこの研究を発展させて，上記の“すべての x の値について”という十分条件を弱める方向へ進む．続く三角級数研究第3論文［3; p. 83 (1871)］は前論文への二つの注意を述べる．第一のものは証明の簡単化で，興味あることにこれについてはクロネッカーへの謝辞がある．クロネッカーは後にカントルの仕事を徹底的に攻撃するのであるが，このころは未だ友好的であったらしい．第二の注意では，前論文の結果の中の“x のすべての値に対し”という条件を弱めて“離散的な無限個の値を除くすべての値に対し”としてよいということが述べられている．そこには，続いて**有界集合の上限の存在**を主張するワイエルシュトラスの定理と同じ内容が述べられている．これから察すると，カントルはワイエルシュトラスとは独立にこの定理をもっていたことになる．そしてその記述に際し，初めて**集合**を表す言葉，Menge と Wertmenge が登場している．すなわち，x のどんな値を除外したとき，定理 1.1 における一意性が依然として成立しているかという考察から，除外してもよい値の集まりとして“値集合”の概念が必然的にカントルの頭脳に浮かんできたのであろう．このような値集合に対する深い考察は，すぐ後の位相的概念の発見を促し，さらには後年の集合概念の形成へと昇華していったわけである．

この意味で重要なのは，集積点と導集合の概念を初めて導入した 1872 年の論文［3; p. 92］であろう．これには，直線上の点の集まりとしての点集合 Punktmenge という言葉が現れている．この論文の中にはもう一つの重要な仕

事が含まれている．それは，いわゆるカントルの実数論の展開である．カントルはここで

$$\forall\varepsilon>0\,\exists m\,\forall n\,(|a_{n+m}-a_n|<\varepsilon)$$

をみたす有理数列 $\{a_n\}$（後の論文で彼は**基本列**とよんだ）を実数と見立てて，実数論を確立したのである．ほとんど同じ時期にデデキントとワイエルシュトラスがそれぞれ別な方法で実数論を建設したこと，そしてこれらの諸定義が同値なものであることはご承知のとおりである．

さてもとへもどって，点集合 P の集積点全体を P' で表し，それを P の導集合という．（点 a が P の集積点であるとは，a が P に属する適当な異なる点の列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ の極限点となっていることである．）[1/] P' の導集合として P'' が定義され，以下同様にして，任意の正整数 k に対し k 次導集合 $P^{(k)}$ が定義される．そこでカントルは，もし $P^{(k)}$ が有限集合ならば（すなわち $P^{(k+1)}=\phi$ ならば）P を第 k 種の集合と呼んだ．結果は，

定理 1.2　三角級数（1）が区間（$0, 2\pi$）内の，なにかある第 k 種の集合 P に属する点を除いたすべての x に対し 0 となるならば，すべての係数は 0 である：$a_n=0$（$n=0,1,2,\cdots$），$b_n=0$（$n=1,2,3,\cdots$）．（これを定理 1.1 の形に述べることは容易であろう．）

このようにして，三角級数の研究途上，点集合の概念や集積点という位相概念が初めて世に現れ，これらの研究が契機となって，実数とは何かとか集合概念の形成，超限の概念および濃度の概念の発見へと発展し，カントルの集合論が創成されるに至ったのである．この意味で三角級数論は集合論の母であるという奇妙なめぐりあわせとなった．カントルがハイネのいるハレ大学へ赴任したことは，数学にとってなんと幸運（?）なことであったろう！

人生において“めぐりあわせ”というものは，全く奇妙なものである．それは個人的な事件にとどまらず，学問の歴史，否，世界の歴史までも決定してしまうことさえあるのである．——第2次世界大戦の元凶と目されるかのアドル

1/　実は，この定義は選択公理と関係がある．第3章§15を見よ．

フ・ヒトラーは，若いころウィーンの美術学校に入学を希望したが，二度の入学試験に失敗し，失意のうちにウィーンを去った．1907年ごろ彼が描いたウィーン風景の絵が残っている．**もし**ヒトラーが美術学校に合格していたならば，第2次世界大戦は起きなかったであろうという説がある．歴史に“もしも”はありえないが，想像できないことではない．めぐりあわせというものは，全くもって不思議なものである．

さて前述のように，この2論文で初めて“集合”に関する用語が現れたのであるが[1/]，初期には用語の不統一が見られる．それはカントルが集合概念をすぐには確たるものにできなかったからであろう．“代数的数全体は可算無限集合である”ことおよび“任意の区間内の実数集合が非可算無限集合である”ことを証明した1874年の有名な論文［3; p. 115］では，集合に対し Inbegriff という言葉が使われており（ちなみに，abzählbar（可算）という術語そのものはこの論文には未だ現れてこない），1878年の濃度 Mächtigkeit を導入した論文［3; p. 119］では，集合に対し Mannigfaltigkeit という術語が使われている．後者の論文では n 次元ユークリッド空間と1次元ユークリッド空間との同等性が証明されている．

用語はともかくとして，集合論の本質は“実無限”の把握にある．カントルがこれを明確に表明したのは，集合論研究が開始されてから10年ほど経った1883年の“一般集合論の基礎”という論文［3; p. 165］においてであった．古くはアリストテレスが無限を，ものとしての無限と，無限分割としての潜在的無限とに区別していたようであるが，彼はものとしての無限は否定する方針であった．19世紀前半最大の数学者ガウスも実無限を否定した．ガウスは「無限を一つの完結したものとして取り扱うことに反対する．そのような使い方は数学では許されない．無限とはものの言い方であって，それは無制限に増大することが許される一つの極限にすぎない」というような意味のことを，ある人への手紙の中で述べている．

1/ “Menge”という用語自体はすでにボルツァノの論説“無限の逆理”（1851）に現れている．

カントルは上述の論文で，有限限界を超えていくらでも大きくなるあるいは(絶対値が）いくらでも小さくなるというような可変的量を表す非実無限（Uneigentlich-Unendliche; 彼は後1887年の論文［3; p. 401］で，これを潜在的無限 potentiale Unendliche と言い替えた）と，すべての有限量をとび超えて存在する固定した量を表す実無限（Eigentlich-Unendliche; これも1887年の論文では akutuale Unendliche と言い替えた）を明確に区別した．これは，すぐ前の論文で“超限”の概念（そこでは未だ transfinite という術語は現れていなかったが）を得ており，実無限を実際に体験しその多様性を悟ったからであろう．無限の多様性，これこそカントルが初めて世にさし示したものである．

§2　素朴集合論

集合とは，よく区別されたものを一まとめにした集まりのことである．何によらず理論の最初に生ずる定義は，どうしてもあいまいさが避けられない．集合論において，集合を他の概念から定義することは，はなはだ困難である．創始者カントルの苦心の跡をみてみよう［3; p. 150］．

> Eine Mannigfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen, die irgendwelcher Begriffssphäre angehören, nennen ich *wohldefiniert*, wenn auf Grund ihrer Definition und infolge des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten es als intern bestimmt angesehen werden muß, sowohl ob irgendein derselben Begriffssphäre angehöriges Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört order nicht, wie auch, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht. （なにかある概念範疇に属する要素の集合は：同じ概念範疇に属するなにかある対象が考察中の集合に要素として属するか否かということや，その集合に属する二つの対象がその実在の仕方で形式的相異をもつにもかかわらず互いに相等しいかあるいはそうでないかということが，共にそれらの定義に基

　づき排中律の論理的原理に従って内的に定まったものとみられねばならないとき，**よく定義されている**とよぶ.)

こう述べて“集合がよく定義されている (wohldefiniert)”ことを規定した．これは，よく定義された（ものの）集まりを集合とよぼう，という趣旨であろう．ずっと後（1895）になって，カントルは次のように集合そのものの定義を述べた［3; p. 282］:

　Unter einer “Menge” verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die “Elemente” von M gennant werden) zu einem Ganzen. (集合とは，我々の直観や思考の定まったよく区別できる対象たち m を一つの全体にまとめたもののことである．m は M の**要素**とよばれる.)

これらの定義によって，集合というものがかなりよくわかるような気がするが，読者はなんとなくすっきりしないところを感じとっていることであろう．たとえば，すべての集合を考察中の対象としてみよう．各集合は定まったよく区別できる対象であると考えられる．したがって，これらすべてを一まとめにした全体は，カントルの定義により一つの集合であると考えられる．そのとき，後述のように矛盾が生じてしまう．ゆえに，上述の“定まったよく区別できる対象を一つの全体にまとめる”ということを，より明確に規定しなければならないことになる．これは極度に困難な問題である．――こんなことを言っていると一向に先へ進まないので，この根本問題はひとまず棚上げしておき，すべての集合の集まりのようなとてつもなく大きい集まりは取り扱わないことにし（そうすれば矛盾が起きないであろう，と虫のよい皮算用をして），“素朴に”集合論を展開することにする．

本章では主として，集合を英大文字で，要素を英小文字で表す．対象 m が集合 M の要素であることを

$$m \in M \qquad (m \varepsilon M \text{ と表す人もいる})$$

で表す．これは先刻ご承知の記法であろう．記号 $\in$ や ε がいつだれによって

使われ始めたか，筆者は寡聞にして知らない．カントル全集には見あたらないが，少なくとも1889年のペアノの論文には be 動詞の意味で ε が使われている．これは一種の所属関係を表していると言える．

要素 a だけからなる集合を，シングルトン（1-要素集合）といい $\{a\}$ で表す．要素 a, b だけからなる集合を $\{a, b\}$ で表す．このようにして，有限個の要素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ からなる集合を $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ で表す．この場合，$\cdots$ が何を表すかが明確でなければいけない．$\cdots$ の意味が明確なときは，この記法を無限集合の場合にも流用する．たとえば，

$$\{0, 2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$$

は偶数全体の集合である．しかし，実数全体の集合のように"要素を並べて表す"ことができないものもある．いやむしろ，ほとんどの集合はこのような表し方ができないものである，と言った方がよい．

さて，素朴集合論の初等的部分の展開は通常，集合算およびその論理学との関係，1対1対応，可算性，濃度の導入とその計算，順序型と順序数——超限順序数，整列定理という進行をとるであろう（もちろん多少の相異はあるが）．本書の目的は，いま最後に現れた整列定理の証明に必要となる選択公理をめぐる諸問題を解説することであり，集合論そのものを展開することではない．したがって，上述の題目には話の筋道として簡単にふれるにとどめる．

集合算　二つの集合 A, B に対し，A の要素がすべて B の要素であるとき，A は B の部分集合であるといい，

（1）　$$A \subseteq B$$

で表す．A の要素と B の要素が全く一致するとき，すなわち $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ であるとき，A と B は等しいといい，

（2）　$$A = B$$

で表す．A と B が等しくないことを $A \neq B$ で表す．もし $A \subseteq B$ かつ $A \neq B$ ならば，A は B の**真部分集合**といい，

（3）　$$A \subsetneqq B$$

で表す[1/]．

二つの集合 A, B の少なくとも一方に属する要素を全部集めて得られる集合を，A, B の**和集合**といい，

$$(4)\qquad A \cup B$$

で表す．また，A, B の両方に含まれる要素全体の集合を，A, B の**共通部分**といい，

$$(5)\qquad A \cap B$$

で表す．要素を一つも含まない集合を考えるとたいへん便利である．これを**空集合**といい，

$$\phi$$

で表す．（これを O あるいは 0 で表す本もある．カントルは空集合という用語は使わなかったが，この概念はもっていて，1879 年の論文に記号 O をもって導入した［3; p.146］．）さっそく ϕ を利用してみよう．A, B 両方に含まれる要素が一つもないときは，

$$(6)\qquad A \cap B = \phi$$

である．このとき，A, B は**互いに素**であるという．次に，A に含まれるが B には含まれない要素全体の集合を，A と B の**差**といい，

$$(7)\qquad A - B$$

で表す．特に $B \subseteq X$ の場合には，$X - B$ を X に関する B の**補集合**という．X を固定しその部分集合のみを考えているときは，B の X に関する補集合を単に補集合といい，

$$(8)\qquad -B,\quad \neg B,\quad CB,\quad cB,\quad B^c$$

などで表す．本書では $-B$ または B^c を使うことにする．

もう一つの重要な集合演算は**対称差**であり，それは次式で定義される：

$$(9)\qquad A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$$

記号は $\oplus$ のほかに $\ominus$ や $\triangle$ などが用いられる．

1/ （1）を $A \subset B$ と書く本がある一方で，（3）を $A \subset B$ と書く本もあるので，他書と見較べるときは注意を要する．

ここで，集合算の主な公式を列挙しておこう．A, B, C は X の部分集合であるとする．

1°)　$\phi \subseteq A$

2°)　$A \cup A = A$　　$A \cap A = A$　（ベキ等法則）

3°)　$A \cup B = B \cup A$　　$A \cap B = B \cap A$　（交換法則）

4°)　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$　　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$　（結合法則）

5°)　$A \cap (A \cup B) = A$　　$A \cup (A \cap B) = A$　（吸収法則）

6°)　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$　　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$　（分配法則）

7°)　$A \cup (-A) = X$　　$A \cap (-A) = \phi$

8°)　$-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$　　$-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$　（ド・モルガンの法則）

9°)　$A - B = A \cap (-B)$

10°)　$A \oplus B = B \oplus A$

11°)　$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

12°)　$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

13°)　$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

14°)　$A \oplus \phi = A$

15°)　$A \oplus B = \phi \iff A = B$

なお，Λ を添字の集合とし，各添字 $\lambda \in \Lambda$ に一つの集合 A_λ が対応づけられているとき，これらの集まりを**集合族**とよぶことがあり，

(10)　$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$,　$\{A_\lambda\}_\lambda$,　$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$

などと書かれる．このとき，少なくとも一つの A_λ に属する要素を全部集めて得られる集合を，(10) の和集合といい，

(11)　$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$,　$\bigcup_\lambda A_\lambda$,　$\bigcup\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$

などで表す．また，すべての A_λ に属する要素全体の集合を，(10) の共通部分

といい，

(12)
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \quad \bigcap_{\lambda} A_\lambda, \quad \bigcap\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$$

などで表す．このとき

16°)
$$-\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(-A_\lambda), \quad -\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(-A_\lambda)$$

が成り立つ．ただし，$A_\lambda \subseteq X$ とする．

このような集合算の考えは，カントル以前にすでにブールやフレーゲ等によって考察されていた．しかし，(11), (12) のような無限個の集合の和や共通部分が取り扱われていたかどうか，筆者には調査不足でわからない．カントルは，自然数の添字をもつ集合，すなわち高々可算個の集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ に対し (11), (12) を取り扱った．カントルは

(11′)　$\mathfrak{M}(A_1, A_2, A_3, \cdots)$　[die Vereinigungsmenge]

(12′)　$\mathfrak{D}(A_1, A_2, A_3, \cdots)$　[Durchschnitt]

という記号を用いていた．――カントルは，点集合 P の第 ω 次導集合 $P^{(\infty)}$ を定義しようとして，初めて (12′) をもち出したのである．(§7 を参照)

上記の諸公式の証明は数理論理学と密接に関係するので，次の節で若干の解説をすることにしよう．

§3　論理演算と集合算

例として，公式 5°) の第 1 式の証明を試みてみよう．二つの集合 $A\cap(A\cup B)$ と A とが等しいとは，

$$A\cap(A\cup B)\subseteq A \quad \text{かつ} \quad A\subseteq A\cap(A\cup B)$$

が成り立つことである．そこで，これらを論理的に証明してみる：任意の要素 $x\in A\cap(A\cup B)$ をとる．$\cap$ の定義から $x\in A$ である．よって，すべての x に対し

(1)
$$x\in A\cap(A\cup B) \quad \text{ならば} \quad x\in A$$

である．ゆえに，定義によって

$$A \cap (A \cup B) \subseteq A$$

である．逆に，任意に $x \in A$ をとる．当然のことながら，$x \in A$ か $x \in B$ であるから，$\cup$ の定義によって $x \in A \cup B$．したがって，$\cap$ の定義から $x \in A \cap (A \cup B)$ である．すなわち，すべての x について

（2）　　$x \in A$　ならば　$x \in A \cap (A \cup B)$

である．ゆえに，定義によって

$$A \subseteq A \cap (A \cup B).$$

これで，$A \cap (A \cup B) = A$ が証明された．

さて，上の証明をふり返ってみよう．**論理的連結詞**

“ならば”，　“かつ”，　“あるいは”，　“でない”

に対し，それぞれ記号

$$\Longrightarrow, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \neg$$

を用いることにする．また，**限定作用素**

“すべての”，　“存在する”

に対し，それぞれ記号

$$\forall, \quad \exists$$

を用いることにする．これらの記号を使うと，上記の（1）と（2）はそれぞれ

（1′）　　$\forall x [(x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B)) \Longrightarrow x \in A]$

（2′）　　$\forall x [x \in A \Longrightarrow (x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B))]$

ということを主張している．これでみると，集合論的記号

$$\cap, \quad \cup, \quad \subseteq, \quad -$$

は，それぞれ論理記号

$$\wedge, \quad \vee, \quad \Longrightarrow, \quad \neg$$

に，ちょうどうまく対応していることがわかる（$-$ については上の議論に現れなかったが，それが否定 $\neg$ に対応することは一目瞭然であろう）．

そこでいま，x が要素を表す変数であるとき（集合自身が要素ということもありうる），x についての文章を **1-項述語** とよび，$P(x)$, $Q(x)$, $\cdots$ などで表すことにしよう．添字をつけることもある．たとえば，

$P_0(x) \equiv x$ は 0 と 3 の間の実数である，

$P_1(x) \equiv x$ は 0 と 3 の間の整数である，

$Q(x) \equiv x$ はなにかある 1 個の要素だけからなる集合である，

等々．述語 $P(x)$ に対し，$P(x)$ が成り立つ（$P(x)$ を満足させる）x 全体の**集まり**を

$$\{x \mid P(x)\} \qquad \text{または} \qquad \{x : P(x)\}$$

で表し，P の**外延**という．逆に，この集まりに対し P をその**内包**という．P の外延がどんなとき**集合**となるかは，議論すべき重要な問題である．上の例でいえば，P_0 と P_1 の外延は集合であるが，Q の外延は集合とはいい難い．後者はあまりにも大きすぎる集団だからである．このことについては後で述べることにしよう．

また，前節で要素を並べて表すことのできない集合についてふれたが，このような集合は性質で定義する，すなわち内包の外延として定義するわけである．したがって，内包を表す述語を明確にする必要がある．そのためには述語論理学を利用するのが賢明で，これは集合論の公理系を述べるところで説明しよう（付録§26 も参照）．

さて，集合算と論理演算との関連にもどろう．二つの集合 A, B がそれぞれ内包 $P(x), Q(x)$ によって，

$$A = \{x \mid P(x)\}, \qquad B = \{x \mid Q(x)\}$$

と定義されているとしよう．そのとき，A と B の和集合，共通部分，差は，内包ではそれぞれ，$\vee$，$\wedge$，$\wedge\neg$ で表される：

$$A \cup B = \{x \mid P(x) \vee Q(x)\}, \qquad A \cap B = \{x \mid P(x) \wedge Q(x)\},$$

$$A - B = \{x \mid P(x) \wedge \neg Q(x)\}.$$

また，A が集合からなるある集合であるとき，A の要素の要素をすべて集めて得られる集合を

$$\bigcup A$$

で表し，A の和集合という．さらに，A の各要素に共通に含まれる要素をすべて集めて得られる集合を

$$\bigcap A$$

で表し，A の共通部分という．これらが集合として存在することは“素朴に”承認されるであろう．さてこのとき，x がこれらの集合に属するということを**記述**してみると，

$$x \in \bigcup A \iff \exists a \in A [x \in a]$$

$$x \in \bigcap A \iff \forall a \in A [x \in a]$$

となる．ここに

$$\exists a \in A\, P(a) \quad \text{は} \quad \exists a [a \in A \wedge P(a)] \quad \text{の略記}$$

$$\forall a \in A\, P(a) \quad \text{は} \quad \forall a [a \in A \Longrightarrow P(a)] \quad \text{の略記}$$

である．上の2式は，

$$\bigcup A = \{x \mid \exists a \in A [x \in a]\}$$

$$\bigcap A = \{x \mid \forall a \in A [x \in a]\}$$

と書くこともできる．

なお“ただ一つの存在”を表す記号

$$\exists! x P(x)$$

も便利であるから，利用することにしよう．それは

$$\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y [P(x) \wedge P(y) \Longrightarrow x = y]$$

の略記と考えられる．

このように，集合演算は論理演算そのものである，と言ってもよいであろう．集合演算の正しさをこのように論理演算に還元させて証明してきたことについては反省すべき点があるのである．“論理演算をこのように無限の対象に対して適用してよいか？”という疑問である．直観主義者は「有限の対象に対して確立されたと考えられる古代アリストテレスの論理を，無限の対象についても無制限に適用したことが数学に危機をもたらしたのである」と主張する．

§4　1対1対応と濃度

二つの集合 A, B が与えられているとする．A の各要素に B の一つの要素

を対応させる対応 f があるとき，f は A から B への**写像**（または**関数**）といい

$$f:\ A \longrightarrow B$$

と書く．A を f の**定義域**，B を**終集合**という．f が A の要素 a に B の要素 b を対応づけるとき，

$$f:\ a \longmapsto b \qquad \text{または} \qquad f(a)=b$$

と書き，b を f による a の**像**（または**値**）という．f による像全体の集合を $f(A)$ で表し，f の**値域**（または A の f による**像**集合）という．rng(f) と書くこともある:

$$f(A)=\mathrm{rng}(f)=\{f(a)\mid a\in A\}$$
$$=\{b\mid \exists a\in A[f(a)=b]\}.$$

もちろん，$f(A)\subseteq B$ である．特に $f(A)=B$ ならば，f は A から B の**上への**写像とか，f は**全射**であるという．また，A の任意の2要素 a, a' に対し常に

$$a\neq a' \Longrightarrow f(a)\neq f(a')$$

が成り立つならば，f は**1対1**写像である，あるいは f は**単射**であるという．f が**1対1かつ上への**写像であるとき，f は**全単射**または**双射**であるという．

二つの集合 A, B に対し，A から B への双射 f が存在するならば，A と B は**同等**（または**対等**）であるといい，

$$A\sim B$$

で表す．$\sim$ は**同値関係**である，すなわち，

1°）$A\sim A$　　（反射法則）

2°）$A\sim B$ ならば $B\sim A$　　（対称法則）

3°）$A\sim B$ かつ $B\sim C$ ならば $A\sim C$　　（推移法則）．

カントルは，A と B が同等であるとき，A と B は**同じ濃度をもつ**と呼んだ．さらに，次のように述べている．「A と B が同じ濃度をもたないときは，A は B のある部分集合と同等であるか，または B が A のある部分集合と同等となる．第一の場合，A の濃度は B の濃度より**小さい**といい，第二の場合は，A の濃度は B の濃度より**大きい**という．」

カントルのこの定義は，

（1）　同じ濃度をもつ

（2）　濃度が小さい

（3）　濃度が大きい

という関係（述語）を定めたものである．それはそれで結構．しかし，この定義では“濃度”とは何かが説明されない．カントルはこの論文（集合論についての第2論文（1878）［3; p.119－ ］）では濃度そのものについてなにも述べなかったが，後年（1895年［3; p.282］）彼は次のような定義を与えた：

「集合 A の**濃度**または**基数**とは，その異なった要素の性質とそれがもつ順序とを度外視することによって，我々の積極的な思考能力により集合 A から生じてくる一般的概念に名づけたものである．

この二重の抽象の結果，A の基数または濃度を

$$\overline{\overline{A}}$$

で表す．」

なにかちょっと奥歯に物がはさまったような感じの説明である．これについて後年フレーゲとラッセルは，濃度を前述の同値関係 $\sim$ による同値類であると定義した．すなわち，集合 A に対し

$$\overline{\overline{A}} = \{B \mid B \sim A\}$$

と定めるのである．これは一見うまい定義のようにみえる．しかし，そこには大きな落し穴がある．A が空集合でないとき，$\overline{\overline{A}}$ はあまりにも大きすぎる集団で，これを集合と認めることはできないという点である．この欠陥を除くには別のアイデアを必要とし，それはむしろ公理的集合論で論ずべき話題であろう．それゆえ，ここではこれに立ち入らないで頬被り（ほおかぶ）りし，濃度記号 $\overline{\overline{A}}$ を使うことにする．

さて，自然数

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

の概念は既知としよう．自然数全体の集合を ω で表す．集合 A に対し，ある自然数 n があって

（4）　$$A \sim \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

となるならば，A は**有限集合**であるという．**このときは**

$$\overline{\overline{A}} = n$$

と（欠陥なく）定義することができる．そうでないとき，すなわちどんな自然数 n をとってきても（4）が成立しないならば，A は**無限集合**であるという．たとえば，自然数全体の集合 ω については，$\omega \sim n$ となる自然数 n がないので，ω は無限集合である．明らかに

ω と同等な集合は無限集合である．

ω と同等な集合を**可算無限集合**といい，有限集合または可算無限集合を**可算集合**という．容易にわかるように，

可算集合の部分集合は可算集合である．

カントルの，集合論についての最初の結果は，次の二つの定理である．

定理 4.1　すべての代数的実数の集合は，可算無限集合である．

定理 4.2　なんらかの法則で与えられた異なる実数の無限列

（5）　$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

に対し，どんな区間 (α,β) にも（5）に現れない実数が（そして，したがって無限に多くのこのような実数が）存在する．

代数的実数とは，ある整数係数の代数方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

の解（根）となる実数 x のことである．たとえば，有理数や $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ 等々は代数的実数であるが，自然対数の底 e とか円周率 π は代数的実数でない（このような数は**超越数**とよばれる）ことが知られている．定理 4.2は，どんな区間をとってきてもその中に含まれる実数全体の集合は可算集合でないことを主張している．この2定理はカントルの集合論の出発点となった基本的重要結果である．これにより，いろいろなことが結論される：

1°）代数的実数はたくさんあるようにみえるが，実は自然数と同じだけの“個数”しかないこと．

2°）実数は自然数より本質的に多いこと，すなわち実数の個数は自然数の

個数より多いこと.

3°）超越数を直接与えなくても，それが代数的実数より本質的に多く存在することが証明されること.

4°）無限には少なくとも2種類の異なるものが存在すること.

など．上で“個数”という言葉を使った．カントルは，有限集合の場合，濃度の概念が個数の概念と一致することから，濃度は個数概念の（無限集合の場合への）一般化であると考えた．そして，無限集合は有限集合と全く異質のものであることを洞察した．彼の言葉を聞こう：

「考察中の集合が有限ならば，すなわち有限個の要素からなっているならば，濃度の概念は個数のそれに従って正整数の概念に対応している．なぜなら，二つの有限集合はそれらの要素の個数が等しいときまたそのときに限り，同じ濃度になるからである．また，有限集合の真部分集合は，常に親(おや)集合より小さい濃度をもつ．これらの関係は無限集合の場合には全く駄目になってしまう．無限集合 A がある他の集合 B の真部分集合であるかまたはそういうものと1対1に対応づけられるという事情だけから，A の濃度が B の濃度より小さいと推断することはけっしてできない．この結論は，A の濃度が B のそれと等しくないとわかったときだけ正しいのである.」([3; p. 119])

カントルは上記2定理をふまえて，集合論の第2論文の中でこのように考察を進め，次第に集合論建設へと向かっていった．実はこの論文にはもう一つ，カントルの集合論にとって**最大のモニュメント**——現代集合論へ遺した最大の問題——とも考えられるものが載っているので，ここに紹介しよう．

「…，連続直線の異なった部分集合，すなわちその考えうる無限点集合における異なった部分集合が，その濃度に関していかに振舞うかという問題が生ずる．我々はこの問題から幾何学的衣裳を脱がせ，すでに前の節で説明されたように，実数線状集合とは無限に多くの互いに異なった実数の考えうる限りの集まりのことであると理解する．そうすると，同じ濃度の集合は一つの同じクラスに，異なった濃度の集合は異なったクラスにまとめ

られるから，線状集合はどれほど多くの，またどのようなクラスに分かれるかということが問題となる．この表現に詳細にふれることなく，帰納的方法によって，“この分類原理に従って生じた線状集合のクラスの個数は有限個であり，より正確にいうと2個である”という定理を理解できるようになる.」([3; p.132])

これはいわゆるカントルの**連続体仮説**を述べたものである．すなわち1次元連続体（実数全体の集合，あるいは一つの区間に含まれる実数全体の集合）の無限部分集合の濃度は2種類しかない——可算無限集合の濃度 $\aleph_0$ ともう一つ——という主張である．もちろん，カントルにこの主張が完全に証明できていたわけではない．彼も自信がなかったのであろう，“…, wird der Satz nahe gebracht, daß …”という書き方をしている．人は上記の主張の研究を**カントルの連続体問題** (Continuum Problem) と呼んだ．この問題は後の数学にきわめて大きな影響を与えた．ヒルベルトは1900年にパリで開かれた国際数学者会議における招待講演（パリ講演と呼ばれる）で，20世紀の数学が追究すべき主要問題として23個の問題を提案した．その最初におかれたのがこの連続体問題である．残念ながら，この話題についてここに詳しく述べる余裕がないので，これについては [9], [12], [15], [17] などを参照されたい．

もう少し同等性の問題を続けよう．まず，直線上の点と実数とが1対1に対応することは認めることにする．これは証明することができないものなので，直線に関する一種の公理として承認するわけである．カントルはこのことを明確に述べることなしに，点集合という呼び方で自由に使った．直線のこの性質を初めて意識して明確にもったのは，**直線の連続性**の定式化に成功したデデキントであろう．

さて，任意の区間（内の点全体の集合）が全実数集合と同等であること，その場合，区間の端点を入れようが入れまいが同等性に変わりがないことなどは，読者は先刻承知であろう．このことをふまえて，

定理 4.3 n を2以上の自然数とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathscr{R}^n$ は1次元ユークリッド空間 $\mathscr{R}$ と同等である．

$n=2$ として考える．上の注意から，$I=(0,1]$, $I\times I=I^2=\{(x,y)\mid 0<x\leq 1, 0<y\leq 1\}$ とおくとき，

$$I^2\sim I$$

を証明すればよい．x, y を 2 進無限小数展開する．その際，有限小数はたとえば

$$0.10011 = 0.10010111\cdots$$

というように，1 が無限に続く小数展開に直しておく：

$$x = 0.x_1x_2\cdots x_n\cdots,\qquad y = 0.y_1y_2\cdots y_n\cdots$$

各々を，初めて 1 で終わる有限列のブロックに分け，それを

$$x = 0.\overline{x}_1\overline{x}_2\cdots\overline{x}_n\cdots,\qquad y = 0.\overline{y}_1\overline{y}_2\cdots\overline{y}_n\cdots$$

とする．たとえば，x が上例の数で，y が $0.010010001\cdots$ であれば，

$$x = 0.\underbrace{1}_{\overline{x}_1}|\underbrace{001}_{\overline{x}_2}|\underbrace{01}_{\overline{x}_3}|\underbrace{1}_{\overline{x}_4}|\underbrace{1}_{\overline{x}_5}|\cdots,\qquad y = 0.\underbrace{01}_{\overline{y}_1}|\underbrace{001}_{\overline{y}_2}|\underbrace{0001}_{\overline{y}_3}|\cdots$$

というわけである．$f:I^2\longrightarrow I$ を

$$f(x,y) = 0.\overline{x}_1\overline{y}_1\overline{x}_2\overline{y}_2\cdots\overline{x}_n\overline{y}_n\cdots$$

によって定義する．たとえば，上例では

$$f(x,y) = 0.1|01|001|001|01|0001|1|\cdots$$

である．この f は容易にわかるように全単射であり，したがって I^2 と I とは同等である．□

次の定理は，$f:A\longrightarrow B$ なる**単射** f が存在するとき $\overline{\overline{A}}\leq\overline{\overline{B}}$ と定義した場合，$\leq$ が反対称律を満足することを示したものである：

定理 4.4（カントル-シュレーダー-ベルンシュタイン）　集合 A, B に対し，

$$f:A\longrightarrow B\ \text{（単射）},\qquad g:B\longrightarrow A\ \text{（単射）}$$

なる写像 f, g があれば，$A\sim B$ である．換言すれば，

$$\overline{\overline{A}}\leq\overline{\overline{B}}\ \text{かつ}\ \overline{\overline{B}}\leq\overline{\overline{A}}\quad\text{ならば}\quad\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}.$$

これは通常カントル-ベルンシュタインの定理と呼ばれているもので，基数理論のもとになる大切な結果である．証明は集合論の本ならどれにも書いてあるから，ここでは証明を省こう（たとえば［15; pp. 22−23］）．ただし，証明に

選択公理が使われて**いない**ことを確かめることは大切である．この定理を使うと，定理 4.3 の証明はより簡単になる．

なお，上述の定義 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ において，$\overline{\overline{A}}$ 自身はいまの段階では欠陥をもつものであるが，**二つの集合** A, B **の間の関係としての** “$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$” は正当なものである．

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} \not\leq \overline{\overline{A}}$$

についても同様である．

§5　可算集合のいくつかの性質

可算集合とは ω と同等な集合または有限集合のことであった．問題は“可算無限集合”にあるから，以下ではこれを単に**可算集合**と呼ぶ．強調して可算無限と書くこともあるが．しかし，**非可算集合**という場合には，有限でもなく可算無限でもない意味にとることとする．

そこでまず，本書の冒頭に述べた命題を再記しよう：

定理 5.1（可算部分集合定理）　無限集合は必ず可算部分集合を含む．

この定理はカントルの論文［3; p. 293］に載っているが，証明は本書の最初に述べたものと同様なものである．すでに言及したように，この定理の成立に
は選択公理が必要である．選択公理の使用を公言した証明は後の章で述べる．

定理の系として，次の結果が得られる：

定理 5.2　無限集合はそのある真部分集合と同等である．

#* **証明**　A を無限集合とすれば，定理 5.1 により A は可算部分集合を含む．よって

$$A = B \cup \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

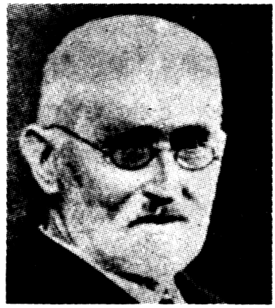
のように分解できる．ただし，B は A からこの可算集合を除いた残りの集合である．このとき

$$A_1 = B \cup \{a_0, a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots\}$$

とすれば，B の要素は自分自身に対応させ，a_n には a_{2n} を対応させることにより，

$$A \sim A_1$$

であることがわかる．明らかに，A_1 は A の真部
** 分集合である．□



デデキント

前節で紹介したように，有限集合についてはそれが真部分集合と同等になることはないので，定理 5.2 に述べられた性質は無限集合特有のもので，無限集合を特徴づける性質である．1878年のカントルの論文［3; p.119］を見ると，前節に訳出したように，カントルもこのことを一般的事実として気づいていたようにみえるが，これを無限集合の定義として打ち出すことはしなかった．

デデキントは――もちろんこの1878年の論文を知っての上であろうが――これを積極的に定義として取り上げ，彼の有名な小冊子 “Was sind und was sollen die Zahlen（数とは何か，何であるべきか)”（1887）の中で次のように書いた（［16］より引用）:

「第64項　**説明**　集合 S は，もしそれが真部分集合と同等ならば“無限”であるといい，そうでないならば“有限”集合であるという.」

さらにデデキントは，次のような註をつけ加えている．

「この無限の定義は私の無限に対する追究の核心をなすものであり，1882年秋にカントルへ，またそれ以前にすでにシュヴァルツ，ウェーバー両氏に知らせておいた．無限を有限から区別する他の試みは，私の知る限りほとんど成功する見込みがないから，それらの試みは断念してよいと思う.」

自然数の定義は集合論公理に基づいて明確に定義できる（［15; p.78］）から，ある自然数と同等な集合を有限集合，**そうでない**集合を無限集合と定義すればよい．したがって，無限を有限から区別する（デデキントの定義と異なる）他の定義があると考えられるから，デデキントは少し言いすぎではないかと疑問をもたれるかもしれない．しかし筆者が察するに，デデキントはもっと深く考

えていたのではないかと思う．彼が「無限を有限から区別する試み」と言ったのは，無限を有限から積極的に区別すること，すなわち無限を**積極的に定義する**ことを意味しているのであろう．ところが，いま私が述べた無限集合の定義は**否定による**定義になっていて肯定的な定義ではない．公理的集合論——これも本書の主題“選択公理”を案出したツェルメロが，集合論の基礎づけとして初めて定式化した理論である——では無限公理をおいて，無限集合の存在を保証している．

無限公理　次の条件をみたす集合 S が存在する：

(1)　$$\phi \in S \wedge \forall x(x \in S \to \{x\} \in S).$$

ツェルメロはこの定義をデデキントの前掲書第 66 項に負うていると記している．デデキントは同項で無限集合の存在を“証明”した．その議論は**すべての**思考可能なものの集合 S を採用しているので正しい証明とは認め難いが，ともかく (1) なる S が彼の定義第 64 項に照して無限集合であることを証明したのである．

もちろん，(1) をみたす集合 S がどんな自然数とも同等でないことも証明できる．そして，それは前述の意味で積極的な定義であるから，デデキントは (1) 自身を無限の（S が無限であることの）定義として採用することもできたであろう．しかし，彼は第 64 項の方をより本質的なものと考えたのである．

それはさておき，無限集合の定義第 64 項は定理 5.2 に基づいているから，選択公理を必要とする．すなわち選択公理のもとでは，第 64 項の定義と通常の“有限でない集合が無限集合”という定義が同値になる．しかし，選択公理が成立しない世界では事情が変わってくる．

定義　自分自身と同等な真部分集合をもつ集合を**デデキント無限**集合といい，デデキント無限でない集合を**デデキント有限**集合という．

そうすると，通常の意味では無限な集合 S でしかもデデキント有限であるような S が存在するであろうか，という問題が生ずる．興味あることに，このよ

うな S の存在はある意味で可能なのである．その意味は次のようである．まだ明確に述べてはいないが，集合論公理系というものが与えられているとしよう．もちろんそれは選択公理を含んでいない体系で，仮りに ZF とよんでおこう(実は正式な名称である)．「もしこの体系 ZF が矛盾を含まないならば，ZF へ命題

（通常の意味での）無限集合でかつデデキント有限な集合が存在する

をつけ加えた拡大系も矛盾を含まない」という定理が証明される(第 4 章§25)．このような体系では，先に述べた定理 5.1 や 5.2 が成立しないわけであるから，ちょっと奇妙に感ずる読者もあるかと思う．それは，いわゆる**可算選択公理**がかなり自然なもので，多くの学者が心情的にこれを認めていることの現れであるとも考えられる．定理 5.1 の証明には完全な選択公理を必要とせず，次の可算選択公理で十分なのである(第 3 章§14)：

可算選択公理　T が**可算集合**で，その要素がすべて空でない集合であるならば，T の選択関数が存在する．

筆者も，完全な選択公理はともかく，この公理ぐらいは自由に使ってよいという立場をとりたい．現代の形式主義や公理主義に立脚すれば，数学の主目標は与えられた公理系からどんな定理が証明されるかを研究することにあるので，ある公理を認めるとか認めないとか言うことはおかしいのではないか，という疑問が起こるかもしれない．しかし，公理はなんでもよいというわけでもないのである．ある公理を仮定するとき，人はその公理に対しなんらかのレーゾン・デートルを考えるであろう．集合論とか実数論のような具体性のある理論の公理系を考える場合には，これこれしかじかの公理は直観的に正しいらしいからこれを公理として認めよう，というような場があってしかるべきであると思う．ただし，群の公理のような抽象的な公理系は別である．

さて，この可算選択公理を仮定すると，数学のかなりの部分を支障なく展開することができる．たとえば，初等解析学や測度論などは十分に展開することができるのである．これについては，さらにまた上述の定理についても，後の章で再びふれることにし，この話題はここでいったん中止しよう．

可算集合の性質としては，次の定理も大切である．

定理 5.3 可算集合の可算個の和集合は，再び可算集合である．(後での引用の都合上，これを**可算和定理**と呼ぶことにする．)

♯ この定理の証明にも可算選択公理が**必要**になる．事実，「ZF が矛盾を含まなければ，ZF に次の命題を加えた拡大系もまた矛盾を含まない：

実数全体の集合は可算集合の可算和である（したがって，定理 5.3 は成立しない）」

という結果が証明される．この命題も全く奇妙である．我々の常識から逸脱していると思う．このように思えることも，前述と同様に，可算選択公理の自然さの，あるいは我々の常識に近いことの現れであると言えよう．

多少くどくなったのでこのへんで止めて，他の項目に目を転じよう．

§6 非可算集合

可算でない集合を**非可算集合**といった．すなわち，集合 A が有限集合でなくかつ自然数全体の集合 ω と同等でないならば，A を非可算集合というのである．証明は述べなかったが，定理 4.2 により次の結果が得られる：

定理 6.1 任意の区間 (α, β) に属するすべての実数の集合は，非可算集合である．

これは集合論の中でも最も有名な定理の一つであるから，集合論に関するほとんどの本に証明が載っているので，本書では省く．カントルが初めてこの定理を発表した 1874 年の論文 [3; p.115] では，区間縮小法による証明が与えられていた(たとえば [15; pp.28−29])．普通の本に書かれているいわゆる**対角線論法**による方法は，ずっと後の 1890 年の論文 [3; p.278] で公表された．そこではこの対角線論法によって，次の形の定理が証明されている：

定理 6.2 任意の集合 A に対し，A のすべての部分集合の集合（これを

$\mathfrak{P}(A)$ で表す）は，A より大きい濃度をもつ：

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathfrak{P}(A)}}.$$

すなわち，A から $\mathfrak{P}(A)$ の中への1対1写像は存在するが，$\mathfrak{P}(A)$ から A の上への1対1写像は存在しない．

これはたいへん重要な結果である．というのは，これによっていくらでも大きい濃度の集合の存在が導かれるからである：

$$(1)\qquad \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathfrak{P}(A)}} < \overline{\overline{\mathfrak{P}^2(A)}} < \overline{\overline{\mathfrak{P}^3(A)}} < \cdots$$

ここで $\mathfrak{P}^{n+1}(A)=\mathfrak{P}(\mathfrak{P}^n(A))$，$\mathfrak{P}^1(A)=\mathfrak{P}(A)$ とした．（いま“いくらでも大きい”という表現を使ったが，このところには正確にいえば**超限順序数**の概念が必要になる．）

具体的な例をあげよう．$I=[0,1]=\{x\in\mathscr{R}\mid 0\leq x\leq 1\}$，$F=\{f\mid f:I\longrightarrow\mathscr{R}\}$ とすれば，

$$(2)\qquad \overline{\overline{\omega}} < \overline{\overline{I}} < \overline{\overline{F}}.$$

ここで $\mathscr{R}$ は実数全体の集合を表す．もし

$$C=\{f\in F\mid f \text{ は連続関数}\}$$

とすれば，

$$(3)\qquad \overline{\overline{C}} = \overline{\overline{I}}$$

となる．(2) の第2の不等式も，対角線論法によって容易に証明される：

* $\overline{\overline{I}}\leq\overline{\overline{F}}$ は，定数関数を考えることによりすぐわかる．よって $I\nsim F$ をいえばよい．そこで，仮りに $I\sim F$ としてみよう．すると，F の各関数 f に I のちょうど一つの要素 x を対応づけることができるから，f の代りに f_x と書くことができる．このとき

$$g(x) = f_x(x)+1 \qquad (x\in I)$$

で定義される関数 g を考えると，たしかに $g\in F$．よって，$g=f_{x_0}$ となる $x_0\in I$ があるはずである．しかし，そのとき

$$g(x_0) = f_{x_0}(x_0)+1 = g(x_0)+1$$

となって，不合理．ゆえに，$I\nsim F$ でなければならない．これで，(2) の第2

の不等式が証明された．この証明が対角線論法を使っていることは，容易に納得できることと思う．□ **

* (3) の証明は，やはり定数関数を考えることにより $\overline{\overline{I}} \leq \overline{\overline{C}}$ がすぐわかるので，$\overline{\overline{C}} \leq \overline{\overline{I}}$ を示せばよい．Q をすべての有理数の集合とする．よく知られているように，I で定義された**連続**関数 f は $Q \cap I$ の各点 r における値 $f(r)$ を与えることによって決定される．Q は可算集合であるから，$Q \cap I = \{r_n \mid n \in \omega\}$ と表せる．このとき，

$$\varphi : f \longmapsto \{f(r_n) \mid n \in \omega\}$$

によって C から実数の可算列全体の集合 ${}^{\omega}\mathscr{R}$ の中への 1 対 1 写像 φ が定まる．よって，

$$\overline{\overline{C}} \leq \overline{\overline{{}^{\omega}\mathscr{R}}}.$$

ところで，

$$(4) \qquad {}^{\omega}\mathscr{R} \sim \mathscr{R} \sim I$$

** が証明されるので，結局 $\overline{\overline{C}} \leq \overline{\overline{I}}$ となり，証明が終わる．□

注意すべきことは，この証明が選択公理を使ってい**ない**ということである．それを知るには，(4) が選択公理なしに証明できることを述べておかなければならない．

* (4) の証明：$\mathscr{R} \sim I$ はご承知であろうから，(4) の第 1 の同等性を示そう．自然数の可算列全体の集合 ${}^{\omega}\omega$ は，次の 1 対 1 写像によって区間 $I_1 = \{x \in \mathscr{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ と同等である：

$${}^{\omega}\omega \ni h \longmapsto \alpha_h = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\left(n+1+\sum_{k=0}^{n} h(k)\right)}$$

$I_1 \sim \mathscr{R}$ はよく知られているから，結局

$$(5) \qquad \varphi : {}^{\omega}\omega \longrightarrow \mathscr{R}$$

なる全単射 φ が存在することがわかる．また，

$$\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

は，**カントルの対関数**（つい）とよばれ，

$$\pi : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$$

なる全単射を与える．π の逆関数を π_1, π_2 とすると，

(6)　　　すべての $k \in \omega$ に対し，$\pi(\pi_1(k), \pi_2(k)) = k$

が成り立つ．さらにまた，${}^{\omega}\mathscr{R}$ の要素 s は

$$s = (s(0), s(1), s(2), \cdots, s(m), \cdots)$$

のように表せる．ここに，各 $s(m) \in \mathscr{R}$ である．よって (5) により $\varphi^{-1}(s(m)) \in {}^{\omega}\omega$ で，再びそれは

$$\varphi^{-1}(s(m)) = (\varphi^{-1}(s(m))(0), \varphi^{-1}(s(m))(1), \cdots, \varphi^{-1}(s(m))(n), \cdots)$$

のように表せる．そこで，

$$\theta : {}^{\omega}\mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{R}$$

$$\theta(s) = (\varphi^{-1}(s(\pi_1(0)))(\pi_2(0)), \varphi^{-1}(s(\pi_1(1)))(\pi_2(1)), \cdots, \varphi^{-1}(s(\pi_1(k)))(\pi_2(k)), \cdots)$$

によって θ を定義すると，θ は全単射である．(6) などに注意して読者自ら確かめられたい．これで，(4) が選択公理なしに証明できた．□ ⁑

いまの証明は ${}^{\omega}\mathscr{R}$ だからうまくいった．

$$\mathfrak{P}_{\omega}(A) = \{X \mid X \subseteq A,\ X \sim \omega\}$$

は，A の可算部分集合全体の集合である．このとき $\mathfrak{P}_{\omega}(\mathscr{R})$ を考えると，それが $\mathscr{R}$ と同等であることの証明が難しくなる．すなわち，

(7)　　　$\mathfrak{P}_{\omega}(\mathscr{R}) \sim \mathscr{R}$

♯ の証明には選択公理が必要になるのである．実は，(7) はかなり強い命題で，これから**非可測集合の存在**が証明されることが知られている．

${}^{\omega}\mathscr{R}$ と $\mathfrak{P}_{\omega}(\mathscr{R})$ との相異はどこにあるのであろうか．後者の要素，すなわち $\mathscr{R}$ の可算部分集合 X といった場合，X を ω と1対1に対応づける方法が無数にある．そのうちのどれを採用すべきか，その指定が問題である．ところが，${}^{\omega}\mathscr{R}$ の要素 s が与えられるということは，

$$s = (s(0), s(1), s(2), \cdots, s(n), \cdots)$$

というように，ω との1対1対応が指定されるということである．一方はどれを指定してよいか戸惑っているのに，他方は初めから指定されるというところ

が，両者の間の大きな相違点なのである．

§7 整列集合と順序数

ご承知のように，自然数は，1 個，2 個，3 個，…… というように物を数えるときに使う**個数**の性格と，1 位，2 位，3 位，…… という順位をつけるときに使う**順序**としての性格とをもっている．前者の場合を**基数**，後者の場合を**序数**という．基数はすでに述べたように，1 対 1 対応を用いて集合が含む要素の**多さ**を測ることにより，無限の場合に拡張され，濃度の概念となった．一方，カントルはまた（これも先にふれたように）三角級数論研究において導集合の概念を発見したが，これを発展させるにあたって，今度は“超限順序数”という重要な概念の萌芽を得た．彼は次のような考察を行なったのである(1879年)．

点集合 P の導集合 P'，その導集合 P''，そのまた導集合 P''' というようにして，第 n 次導集合 $P^{(n)}$ を定義する．さらに，これら全体の共通部分を作り $P^{(\infty)}$ を定義する：

$$P^{(\infty)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)}.$$

これを P の**順位** ∞ の導集合と名づける．再び $P^{(\infty)}$ の導集合が考えられる．それを $P^{(\infty+1)}$ で表す．同様に，$P^{(\infty)}$ の第 n 次導集合 $P^{(\infty+n)}$ が定義される．したがって，

$$P^{(\infty\cdot 2)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(\infty+n)}$$

が得られる．さらにこれを拡張すると，上付添字として

(1) $\quad 1, 2, \cdots, \infty, \infty+1, \cdots, \infty\cdot 2, \infty\cdot 2+1, \cdots, \infty\cdot 3, \cdots, \infty\cdot 4, \cdots, \infty^2, \cdots$

が，そして一般に

(2) $$\infty^{\nu}\cdot n_0 + \infty^{\nu-1}\cdot n_1 + \cdots + \infty\cdot n_{\nu-1} + n_{\nu}$$

という順位が定義される．さらに，その先の

$$P^{(\infty^{\infty})} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P^{(\infty^n)}),\ \cdots\cdots$$

という具合に，いくらでも“超限”に大きな順位を考えることができる．(1)

や（2）は，後に ∞ を ω で表し，**順序数**として結実する[1].

カントルはこのような考察から整列集合の概念を得たのであろう，1883年の論文［3; p.165］でこれを発表した．

集合 M 上の2項関係 $<$ が**線形順序**（全順序ともいう）であるとは，M の任意の要素 x, y, z について次の3条件が成立するときをいう：

（i）　$\neg(x<x)$　（非反射法則），

（ii）　$(x<y \wedge y<z) \Longrightarrow x<z$,

（iii）　$x<y \vee x=y \vee y<x$.

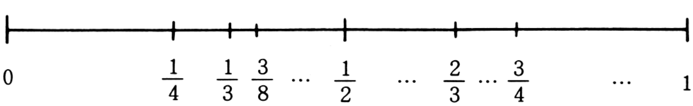
このとき，M は（$<$ に関し）線形順序集合であるという．さらに条件

（iv）　M の空でないどんな部分集合も $<$ に関する最初の要素をもつ

がみたされるならば，M は $<$ によって**整列**されている，あるいは M は**整列集合**（Wohlgeordnete Menge, well-ordered set）であるという．

たとえば，有理数の部分集合

$$
\begin{aligned}
A = &\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n=0,1,2,\cdots\right\} \\
&\cup\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n=0,1,2,\cdots\right\} \\
&\cup\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n=0,1,2,\cdots\right\} \\
&\cup\cdots\cdots
\end{aligned}
$$



を普通の大小の順序で考えると，

$$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\ \ \frac{3}{4},\ \cdots,\ 1$$

は，それぞれ上の（1），（2）における

1/　我々はすでに ω を自然数全体の集合として用いた．それは，カントルの順序数 ω を現代化・正当化したものである（［15; 第3章］）.

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \infty,\ \infty\cdot 2,\ \infty\cdot 3,\ \cdots,\ \infty^2$$

に相当していることがわかる．そして，この集合 A のどんな部分集合を考えても，その中に最小の要素があることを直観できるであろう．

これに反し，有理数全体の集合 Q や，前節の $I=\{x\in\mathscr{R}\mid 0\leq x\leq 1\}$，および集合 $B=\{1/n\mid n=1,2,3,\cdots\}$ は通常の大小の順序 $<$ に関し（線形順序集合ではあるが）整列集合でない．たとえば B については，B 自身および部分集合 $\{1/n\mid n=2,4,6,\cdots\}$ などは最初の要素をもたない．

ここに，与えられた線形順序集合が整列集合であるか否かをチェックする一つの方法がある．"M が線形順序集合である" というときは，当然ながら M 上の一つの順序関係 $<$ を付随して考えている．よって，M と $<$ を併せて，システム $\langle M,<\rangle$ として取り扱うべきである．このシステムを**順序構造**という．しかし，いちいち $\langle M,<\rangle$ と書くのも面倒であるから，$<$ を省略して単に線形順序集合 M あるいは整列集合 M と略称する．

ここで，後の章のために，一般の順序について説明しておこう．

集合 M 上の2項関係 $<$ が前記（i）と（ii）をみたすとき，$<$ は M 上の**順序**（関係）であるといい，M は（$<$ に関し）**順序集合**であるという．一般に順序構造というとき，あの $<$ は順序をさしている．（しばらく前までは**半順序**とよんでいた.） この場合，線形順序と異なって，比較不能な要素があってもよいのである．

$x<y\vee x=y$ を $x\leq y$ で表すと，$\leq$ は次の3条件をみたすことになる： $x,y,z\in M$ に対し，

1°）$x\leq x$　（反射法則）

2°）$x\leq y\wedge y\leq x\Longrightarrow x=y$　（反対称法則）

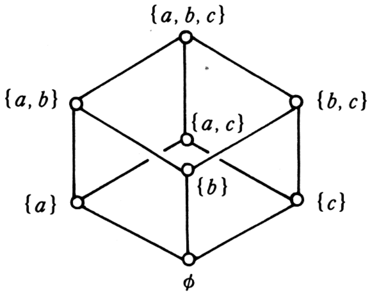
3°）$x\leq y\wedge y\leq z\Longrightarrow x\leq z$　（推移法則）

初めから $\leq$ を用いてこの3条件によって，順序 $\leq$ を定義することも多い．

たとえば，三つの異なる記号 a,b,c からなる集合を $A=\{a,b,c\}$ とし，その部分集合全体の集合

$$\mathfrak{P}(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}$$

を考える．< として集合の真包含関係 $\subsetneq$ をとると，$\langle \mathfrak{P}(A), < \rangle$ は順序構造でこれは（有限）**ブール代数**と呼ばれるものの一例である．これを右のような図式（ダイヤグラム）で表す．上下または斜めの線で結ばれた2要素の下を x，上を y とすれば，そのことは $x<y$ を表している．そうでない2要素は比較不能である．たとえば $\{a\}<\{a,b,c\}$，しかし $\{a\}$ と $\{b,c\}$ は比較不能である．



順序概念は，極大原理を取り扱う第3章§16では必須のものである．

さて，整列集合であるかどうかをチェックする方法へ戻ろう．それは次の定理で与えられる：

定理 7.1　線形順序集合 M が整列集合であるための必要十分条件は，無限下降列が存在しないこと，すなわち

(3)
$$\cdots < x_n < \cdots < x_3 < x_2 < x_1$$

なる系列 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ が存在しないことである．

前の例 B では，B 自身が無限下降列である：

$$\cdots < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1.$$

また，Q も I も B を含んでいる．よって，これらはどれも整列集合でない．しかし，B は反対の順序に関しては整列集合になる．

ところが，定理 7.1 の証明には**選択公理が必要になる**．無限下降列（3）が存在すれば，たしかに M の部分集合 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ には最初の要素が存在しない．よって，M は（< に関して）整列集合でない．したがって，必要性の証明は OK である．肝腎の十分性の証明に選択公理を必要とするのである．だから，選択公理が許されない集合論では，定理 7.1 によるチェック方法——無限下降列がなければ整列集合である——を利用することはできない．

*　**十分性の証明**　線形順序集合 $\langle M, < \rangle$ が整列でないとする．よって M の空でない部分集合 E_0 で，$<$-最小元をもたないものがある．$a \in E_0$ を任意にと
♯　っておく．選択公理により，$\mathfrak{P}(E_0)$ の選択関数 f がある：

$$u \neq \phi \wedge u \subseteq E_0 \Longrightarrow f(u) \in u.$$

そこで，$g : \omega \longrightarrow M$ を次のように定義する：まず $g(0) = a$ とする．次に，$E_n, g(n)$ が定義されたとするとき

$$E_{n+1} = \{x \in E_n : x < g(n)\}, \qquad g(n+1) = f(E_{n+1})$$

と定義する．E_0 が $<$-最小元をもたないことから，数学的帰納法によって，E_{n+1} が E_n の空でない始切片であることが示される．よって，g は ω 上で定義されていて，M の要素の無限下降列

$$g(0) > g(1) > \cdots > g(n) > \cdots$$

**　を与える．□

さて，カントルは新しい数 Anzahl（普通の数概念と異なる新しいものなのでカントルは Zahl という単語を使わなかったのであろうか）を導入する．集合の濃度を同等な集合たちがもつある共通の性質として定義したように，整列集合の Anzahl（後の Ordnungszahl を考慮して**順序数**と訳しておこう）を，順序同形な整列集合たちがもつある共通の性質として定義する：

定義 7.2　二つの整列集合 $\langle M, <_1 \rangle, \langle N, <_2 \rangle$ は，順序関係を保存する 1 対 1 対応によって一方を他方の上へ写像することができるならば，すなわち

(4)　$$f : M \longrightarrow N, \qquad x <_1 y \Longrightarrow f(x) <_2 f(y)$$

なる全単射 f が存在するならば，同じ**順序数**をもつという．

後の論文 [3; p. 282 (1895)] では，一般な線形順序集合の場合にもこの考えをおし広め，順序型なるものを定義した：

定義 7.3　二つの線形順序集合 M, N は，(4) なる全単射 f が存在するならば**相似**であるといい，相似な集合は同じ**順序型**をもつという．これを $M \simeq N$ で表す．整列集合の順序型を**順序数**（Ordnungszahl）という．

このようにして順序数の理論を展開したのであるが，前述の濃度の定義と同様に，決定的な欠陥が生じてしまった．いわゆるブラリ・フォルティの逆理である（[15; 第 1 章]）．また上の定義では，順序型，順序数というものの実体が明確でない．正しい概念を得るには他の方法によらなければならない．その方法によれば，順序数は集合として明確に定義され，順序数全体は（集合とは区別された）**クラス**として与えられる．これを OR で表す．§21 を参照されたい．

ここで簡単な例をあげる．1 以上の自然数 n に対し，

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n-1$$

という整列集合 $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ の順序型を n で表す．空集合――それは整列集合である！――の順序型を 0 で表す．したがって，各自然数は順序数である．これを**有限順序数**という．

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < n+1 < \cdots$$

という無限整列集合 $\{0, 1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots\}$ の順序型を

$$\omega$$

で表す．これは，本節の最初の部分で ∞ で表したものに他ならない．

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < n+1 < \cdots < \omega$$

という整列集合の順序数を $\omega+1$ で表す．等々．無限整列集合の順序型を，**超限順序数**（Transfinite Ordnungszahl, transfinite ordinal number）という．

また，先に引用した論文 [3; (1883) p. 182] には，数学書にしばしば引合いに出される“数学の本質はまさにその自由性にある”というカントルの有名な言葉が載っている．この機会に，それについて一言しておこう．

カントルは新しい数（すなわち，超限基数，超限順序数）の発見に際し，数学の発展は全く自由で，それを制約するものはただ新概念が矛盾を含まず，在来の概念と秩序を保っていさえすればよいということだけである，という意味のことを述べ，このような原則の中になにか危険が潜んでいるなどと恐れる必要はないと信ずると言った後，

「これに反して私には，数学的探究心を不必要に狭くすることは，非常に

大きな危険を，そして学問の本質からこのことに対し決して是認がひき出されないだけに，それだけいっそう大きい危険をもたらすように思える．なぜなら，**数学の本質はまさにその自由性にある**からである．」

と言いきった！　これは，カントルの集合論があまりに斬新革命的のゆえに当時の保守的頑迷な数学界になかなか認められなかったことへの，カントルの抗弁と心意気，創造への姿勢を示したものと言えよう．

いままで順序数に対し欠陥のある定義を述べただけであるが，このような定義に基づいて得られる大部分の結果は合理化されて，正しい結果として通用する．このことをご承知おきいただいて，先へ進むことにする．

おそらく後の章で，整列集合や順序数についてのいろいろな性質，超限帰納法などが必要になると思うが，これらをここで解説しているとなかなか本論に入っていけないので，そういったものは他の集合論の本に委ねることにしよう．また，集合論の公理系とその解説は第4章で述べる．

第2章　選択公理の出現

§8　基数の整列の問題

カントルは，あの有名な対角線論法を公表した論文［3; p.278］の中で,「任意の集合 L に対し，L の濃度より強い [1] 濃度をもつ他の集合 M をその側に提供することができる [2]」ことの例証――例証とはいえ，十分一般的な証明法になっている――を行なった後で，次のように述べた：

「私は前に“一般集合論の基礎”(Leipzig 1883; Math. Ann., Bd 21）という論文で，全く別の手段で，濃度は最大のものをもたないことを証明した．その上，そこでは**すべての**濃度の集合（Inbegriff）は濃度を大きさに従って並べたと考えたとき，次のような形に**整列された**集合（Menge）を形成する．すなわち，各濃度にはその性質上すぐ次に大きいものが存在するが，濃度の上昇する集合で最大者のないものにもすぐ次に大きい濃度が続く，というように.」(太字は筆者による強調)

ところが実際は，カントルが引用した論文を調べてみても上述の事柄の証明は載っていない．(ツェルメロは後年カントル全集を編集したとき，このところに脚註をつけ,「それは，カントルが，どの集合も整列性をもちしたがって各濃度がアレフ数であるということの証明を，もっていなかったからである」と述べている．なお，アレフ数とは整列集合の濃度のこと.）カントルは，1899年

1/　stärker という言葉を使っている．濃度の語源は Mächtigkeit (力強いこと）であるから，“より強い”と表現したのであろう．

2/　今日だったら，M が“存在する”と書いたであろう．原文は，… L eine andere M an die Seite gestellt werden kann となっている（辞書によると“比肩させる”という意がある).

7月28日付のデデキントへの手紙の中で，アレフ数以外の別な濃度は存在しないという証明を2年前からもっていますと述べ，（他の命題と共に）その証明を書き記した［3; p. 443］．したがって，このことは計らずも彼自身1883年の時点ではその証明をもっていなかったことを示していて，当時の不確かさを露呈したものとなった．手紙の中に記された証明自体もとうてい正しいものとは言えず，後にカントル自身それが不十分なものであることを認めたという．

さて，

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

を**有限基数**という．これらは**有限順序数**でもある．集合

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

の基数──“基数”も現段階では実体が明確でないが──を

$$\aleph_0 \quad （アレフ・ゼロ）$$

で表す．$Z(\aleph_0)$ は，基数が $\aleph_0$ である整列集合（すなわち可算集合である整列集合）の順序型全体の集合を表す．$Z(\aleph_0)$ に属する順序型は**第2級順序数**とよばれる．これに対し，有限順序数を**第1級順序数**とよぶことがある．順序数自体も線形順序をもっており，その順序に従って集合 $Z(\aleph_0)$ は整列集合をなす．

定理 8.1　集合 $Z(\aleph_0)$ の濃度は $\aleph_0$ より大きい．

*　**証明**　$\overline{\overline{Z(\aleph_0)}} = \aleph_0$ と仮定しよう．すると，$Z(\aleph_0)$ の全順序数は

(1)　$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$$

と自然数の番号がつけられる．$n_0 = 0$ と定める．α_{n_0} より大きい最小番号の α_n を α_{n_1} とすれば，$n_0 < n_1$．次に，α_{n_1} より大きい最小番号の α_n を α_{n_2} とすれば，$n_1 < n_2$．以下同様にして，

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_\nu < \cdots$$

(2)　$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_1} < \alpha_{n_2} < \cdots < \alpha_{n_\nu} < \cdots$$

なる系列が得られる．このことから，(2) のどれよりも大きい最小の順序数 β の存在が導かれる：

(3)　$$\alpha_{n_\nu} < \beta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

それは，高々可算な整列集合の可算個の和集合がなす整列集合の順序型として与えられるものであるから，β 自身第2級順序数である：$\beta \in Z(\aleph_0)$．したがって，β は（1）の中のどれか一つと一致するはずである：$\beta = \alpha_m$．作り方から α_m は（2）のどこかの区間に落ち入るので，このことは（3）と矛盾する．ゆえに，$\overline{\overline{Z(\aleph_0)}} \neq \aleph_0$．したがって，$\overline{\overline{Z(\aleph_0)}} > \aleph_0$．□

定義 8.2　$\overline{\overline{Z(\aleph_0)}}$ を $\aleph_1$ で表す．

定義 8.3　第2級順序数より大きい最小の順序数を

$$\omega_1$$

で表す．$\omega_1 = Z(\aleph_0)$ である．

濃度 $\aleph_1$ をもつ整列集合の順序型を第3級順序数といい，高々第3級順序数全体の集合を $Z(\aleph_1)$ で表す．$Z(\aleph_0)$ の場合と同様にして，$Z(\aleph_1)$ は整列集合をなし，$\overline{\overline{Z(\aleph_1)}} > \aleph_1$（選択公理が必要）．$\overline{\overline{Z(\aleph_1)}}$ を $\aleph_2$ で表す．第3級順序数より大きい最小の順序数を ω_2 で表す．このとき $\omega_2 = Z(\aleph_1)$ である．以下同様に進み，基数と順序数の対応する系列，第 $\nu+1$ 級順序数の組

（4）　$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\nu < \cdots$

（5）　$\omega = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_\nu < \cdots$　　（ν は自然数）

（6）　$Z(\aleph_0), Z(\aleph_1), Z(\aleph_2), \cdots, Z(\aleph_\nu), \cdots$

が得られる．これらをさらに

（4′）　$\aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2} < \cdots$

（5′）　$\omega_\omega < \omega_{\omega+1} < \omega_{\omega+2} < \cdots$

（6′）　$Z(\aleph_\omega), Z(\aleph_{\omega+1}), Z(\aleph_{\omega+2}), \cdots$

というように“超限”にいくらでも拡張していくことができる．

(4), (4′) に現れる $\aleph_\alpha$ は**アレフ数**とよばれる．これらは**整列集合の濃度**である．すなわち，(4), (4′) はどこまでも整列集合を大きくしていって得られたものであるから，**すべての**整列集合の濃度の系列になっている．二つの整列集合は相似であるか，一方が他方の始切片と相似であるから，整列集合の濃度は大きさが互いに比較でき，すべて (4), (4′) なる系列の中に組み込まれてし

まって，はみだすことはない．（もちろん，(5) や (5′) の間には他の順序数がたくさん入っている．たとえば $\omega_1+\omega$ は ω_1 と ω_2 の間にある一つの順序数である．そしてそれを順序型としてもつ整列集合は，濃度 $\aleph_1$ をもつのである．）

問題は系列 (4), (4′) からはみだす濃度があるだろうかということである．本節冒頭でも触れたが，カントルはデデキントへの手紙の中に次のように書いた：

「B. すべてのアレフ数のシステム ת（タウ）

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \cdots,\ \aleph_{\omega_0},\ \aleph_{\omega_0+1},\ \cdots,\ \aleph_{\omega_1},\ \cdots$$

は，その大きさの順序で，あらゆる順序数のシステム Ω と相似な，そしてしたがって（Ω と）同様に非整合的な絶対的無限系列をなしている．

そこで，このシステム ת の中に**すべての**超限基数が含まれるかという問題が起こります．すなわち，濃度がアレフ数でないような**集合**が存在するか？ということです．

この問いは否定されます．その理由は，システム Ω および ת に対し我我が認識したその非整合性にあるのです．」

このように書いてその証明を始めるわけであるが，上記の文章の意味も明確でない上に，さらにその証明には二つの重大な欠陥があった．一つはとうてい証明できそうにない事柄を「容易に認められる」としていること，もう一つは非整合的な概念を利用していることである．ツェルメロは，後者だけでもすでに論理的に容認できないものであると述べて，この種の疑念が私をして非整合的集まりを利用することなく純粋に選択公理に基礎をおく整列定理の独自の証明を行なわしめたのである，と告白している（[3; p. 451]）．（このようにカントルの議論の欠陥をあげつらうのは，カントルを貶(けな)すためでは毛頭ない．カントルの業績が全く創造的な不朽のものであることは論をまたない．ここでは，カントルが自己の発見した整列の問題や連続体の問題に後々までも真摯(し)に取り組んでいたひたむきな姿と，それらが天才カントルをもってしてもなおかつ解決に至らなかったほど困難な問題であったこととを強調したかったまでである．）

さて，いま問題になっているのは結局“どの集合も整列集合であるか？”ということである．これの肯定を**整列定理**という．



← ツェルメロ

ヒルベルト →



整列定理　すべての集合は整列集合である．すなわち，どんな集合も適当に線形順序関係を定めてやれば，それに関し整列集合となる．

この整列定理を証明せんとして生まれ出てきたのが，本書の主題たる選択公理である．

§9　ツェルメロの証明

本書は一種の物語りであるから歴史を重視して，整列定理に対するツェルメロの初めての証明を紹介しよう．文献［57］にだいたい忠実に従って述べることにする．

ツェルメロによれば，問題の証明はエアハルト・シュミットと交わした会話から生まれたものだという．なお，この論文はツェルメロがヒルベルトへ送った手紙（1904年9月24日付）の一部分である．数学年報（Mathematische Annalen）の編集委員であったヒルベルト[1]が内容の重要さを認め，直ちに出版したものらしい．そのため，同年の巻に収められている．今日ではとてもこのようなわけにはいかないであろう．さて，証明の紹介に移る：

*　（1）Mを基数 $\mathfrak{m}$ の任意の集合とし，m をその任意の要素，M' を M の空でない部分集合でその基数が $\mathfrak{m}'$ であるものとする．ただし，$M'=M$ であっ

1/　ダヴィッド・ヒルベルトは19世紀末葉から20世紀前半の間の世界最大の数学者の一人である．アンリ・ポアンカレと共に，同時代を二分する大数学者と認められていた．

てもよい．また $M-M'$ は M に関する M' の補集合を表す．二つの部分集合は，もしそれらの一方が他方に現れないある要素を含むならば，相異なると考えられる．M の空でないすべての部分集合の集合を $\boldsymbol{M}$ で表す．

（2）　各部分集合 M' と M' 自身に現れる任意の要素 m_1' が組み合わされると想像せよ．m_1' を M' の**識別された**要素とよぶ．これは集合 M のある要素たちによる集合 $\boldsymbol{M}$ への一つの**割当**（Belegung, covering）γ を生ずる[1]．これらの割当の個数は，すべての部分集合 M'（$\neq \phi$）上での積 $\prod \mathfrak{m}'$ に等しい．したがって，それはたしかに ϕ と異なる．以下では我々は任意の割当 γ をとり，それから M のすべての要素の一定の整列を導く．

（3）　**定義**　M の要素からなり次の性質をもつ整列部分集合 M_γ を“γ-集合”という：a が M_γ の任意の要素であるとき，

$$A^a_{M_\gamma} = \{x \in M \mid x < a\}$$

とおくならば（これを a と**組み合わされた**始切片という），a は常に $M-A^a_{M_\gamma}$ の識別された要素である，すなわち $a=\gamma(M-A^a_{M_\gamma})$ である．

（4）　M に含まれる γ-集合が存在する．たとえば $M'=M$ ととって，M の識別された要素を m_0 とすれば，1-要素集合 $\{m_0\}$ は γ-集合である．m_1 を $M-\{m_0\}$ の識別された要素とすれば（もちろん $M-\{m_0\}\neq\phi$ として），2-要素集合 $\{m_0, m_1\}$ はまた γ-集合である．その際 $m_0 < m_1$ と定めておく．

（5）　M_γ' と M_γ'' が二つの異なる γ-集合ならば（ただし一度選んだ同じ割当 γ と組み合わされているとする——その意味は，同一の選択関数 γ を用いているということ），その一方は他方の始切片と一致する．

なぜなら，（二つの整列集合が与えられると，一方が他方とまたはその始切片と相似になるから）たとえば M_γ' が M_γ'' 自身またはその始切片と相似であるとしよう．そのとき，この相似写像のもとで互いに対応するどの二つの要素も一致しなければならない．［その証明：　まず，どの γ-集合の最初の要素も m_0，すなわち M 自身の識別された要素である．（なぜなら，M_γ を任意の γ-

---

1/　これは M の空でない部分集合全体の集合 $\boldsymbol{M}$ の一つの選択関数 γ が与えられたことを意味している：$M'\in\boldsymbol{M} \Longrightarrow m_1'=\gamma(M')\in M'$．

集合とし，その整列順序での最初の要素を a とすれば，$A^a_{M_\gamma}=\phi$ であるから，定義によって $a=\gamma(M-A^a_{M_\gamma})=\gamma(M)=m_0$.）さて，$m'$ が（問題の相似写像で）対応する要素 $m''\in M''_\gamma$ と異なる M'_γ の最初の要素ならば，“最初”という性格によって始切片 $A^{m'}_{M'_\gamma}$ と $A^{m''}_{M''_\gamma}$ とは等しくなければならない．したがって，$m'=\gamma(M-A^{m'}_{M'_\gamma})=\gamma(M-A^{m''}_{M''_\gamma})=m''$ となり，不合理．ゆえにこのような m', m'' は存在しない．すなわち，上述の相似写像で対応するどの対 m', m'' についても $m'=m''$ となる.］ このことは，M'_γ が M''_γ 自身かその始切片に等しいことを意味する.

（6） 結論．以上のことから次の事柄が結論される：二つの γ-集合 M'_γ, M''_γ が共通の要素 a を含めば，$A^a_{M'_\gamma}=A^a_{M''_\gamma}$ である．また，もしそれらが異なる二つの要素 a, b を共有するならば，a と b はどちらの γ-集合においても同じ順序関係にある．すなわち，M'_γ で $a<b$ ならば，M''_γ でも $a<b$ である.

（7） なにかある一つの γ-集合に現れる（M の）要素を“γ-要素”と名づける．次の定理が成り立つ：すべての γ-要素全体 L_γ はそれ自身一つの γ-集合となるように順序づけられ，しかもそれはもとの集合 M のすべての要素からなる．したがって，M は整列される.

証明　いくつかの段階に分けて証明する.

（I） a, b が二つの異なる任意の γ-要素で，$a\in M'_\gamma, b\in M''_\gamma$ とする．そのとき（5）によって，二つの γ-集合のうち大きい方は a, b 両方を含む．この大きい方の γ-集合において $a<b$ ならば，$a<^*b$ と，$b<a$ ならば $b<^*a$ と定義する．これにより，すべての γ-要素の間に関係 $<^*$ が定義される．（6）により，この定義は a, b を含む γ-集合の選び方に依存しない.

（II） a, b, c が三つの異なる任意の γ-要素で，$a<^*b$ かつ $b<^*c$ ならば，$a<^*c$ である．証明：（6）によって，c を含む γ-集合は b を含み，したがってまた a をも含む．$<^*$ の定義により，その γ-集合内で $a<b$ かつ $b<c$ であり，$<$ は当然線形順序であるから $a<c$ であり，したがってまた定義により $a<^*c$ である.――ゆえに $<^*$ は全順序である.

（III） L'_γ が L_γ の任意の部分集合で，$a\in L'_\gamma$ とせよ．したがって，ある γ-

集合 M_γ について $a\in M_\gamma$ となる．(6) により M_γ は $A^a_{M_\gamma}=\{x\mid x<a\}=\{x\mid x<^* a\}$ を含んでいる．したがって，M_γ は

$$L''_\gamma = L'_\gamma - \{x\mid a<^* x\}$$

を含む．L''_γ は整列集合 M_γ の空でない部分集合であるから，$<$ についての，したがって $<^*$ についての最初の要素 e をもつ．e は L'_γ の $<^*$ に関する最初の要素である．ゆえに，L_γ は $<^*$ に関して整列されている．

(Ⅳ)　a が任意の γ-要素で（すなわち $a\in L_\gamma$），$A^a=\{x\mid x<^* a\}$ とおけば，(6) によって，$a\in M_\gamma$ なる**すべての** γ-集合 M_γ に対し $A^a_{M_\gamma}=A^a$ となる．ゆえに (3) により，a は $M-A^a$ の識別された要素でなければならない：$a=\gamma(M-A^a)$．したがって，**L_γ は一つの γ-集合である**．

(Ⅴ)　もしどの γ-集合にも属さない M の要素が存在したとすれば，すなわち $M-L_\gamma$ の要素 m が存在したとすれば，$M-L_\gamma$ の識別された要素 m'_1 が存在することになる．m'_1 を L_γ のすべての要素の後へおくことにより，線形順序集合 $L_\gamma\cup\{m'_1\}$ が得られる．(3) により，この集合自身一つの γ-集合である．よって，m'_1 が γ-要素となる．これは $m'_1\in L_\gamma$ を意味するから，不合理．ゆえに $L_\gamma=M$，したがって M 自身整列集合となる．　　（全証明終わり）

さらに続けてツェルメロは言う：

「M の各割当 γ に対し，M の一つの定まった整列順序が対応する．二つの異なった割当に対応する整列順序が常に異なっているというわけではないが．とにかく，少なくとも一つのこのような整列関係が存在しなければならない．そうして，部分集合全体というものが意味をもつ集合は整列集合であると考えられ，その基数は“アレフ”であると考えられる．それゆえ，すべての超限基数 $\mathfrak{m}$ に対し

$$\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m} = \aleph_0\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2,\qquad \text{等々},$$

そうしてどの二つの集合も“比較可能”である．すなわち，それらの一方は常に他方の上またはその部分集合の上へ１対１に写像される．

いまの証明は，割当 γ が実際に存在するという仮定に基づいている．し

たがってそれは，集合たちの無限の集まりに対してさえ，その各集合にその要素の一つを対応させる写像が常に存在するという原理に，あるいはこれを形式的に表せば，無限個の空でない集合の直積は空でないという原理に，基づいている．この論理的原理はより単純なものに還元できると思えない．しかし，それは数学的推論でどこでも躊躇なく適用されている．たとえば『一つの集合 M が類別されるとき，その類の個数が M の要素全体の個数より小さいか等しい』という命題の正当性は，各類とその要素の一つとを組み合わせることによるほかは証明することができないであろう．

私は，この原理をよび出すことによって，整列順序に対する基礎として任意の割当 γ をとることができるというアイデアをエアハルト・シュミットに負うている．証明は，私がそれを遂行したように，いろいろな可能な“γ-集合”の合体に，すなわち順序原理から結論される整列な始切片の合体に基づいている.」

少し長い文章になったが，ツェルメロ自身の解説としてたいへん有意義であると思う．

以上が選択公理の発生の模様であるが，ここでは未だ選択公理という術語は使われていない．しかし，上でツェルメロが“原理”と呼んだものはまさしく選択原理である．彼はルベーグのように――ルベーグの見すごしについては後述する――無意識にこれを使っていたのではなく，まさしく「… という仮定に基づいている」と明言している．この点がたいへん重要であると思う．ツェルメロの上述の語りは，選択原理が数学のあちこちで無意識に使われていることに注意を向けるよう促したものであると推察できる．

なお，上でツェルメロが記した「どの二つの集合も比較可能である」という命題は，前節で引用したカントルの文の後半の言い換えで，19世紀も間もなく幕を閉じようというころ集合論関係者（カントルやその周辺の人々，フランスのボレルを含む）の間で大いに論ぜられていた中心的問題の一つ“基数の3分法”に他ならない．

基数3分法（Trichotomy of Cardinals）（i）どの二つの集合も必ず一方が

他方(の中)へ1対1に写像される．すなわち，任意の二つの集合 A, B について

$$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \quad \text{または} \quad \overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}.$$

あるいは，次のように述べることもできる．

基数3分法（ii）任意の二つの基数 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ について，

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{n} \quad \text{または} \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \quad \text{または} \quad \mathfrak{m} > \mathfrak{n}$$

のどれかちょうど一つが成り立つ．

カントルはたいへんな努力を払ったけれども，またボレルにこれを証明するよう勧めたけれども，いずれも成功しなかった．ツェルメロは整列定理を証明して，それから基数3分法を直ちに導いたわけである．しかし，整列定理と基数3分法が**同値である**ことの証明は，なお10年を待たなければならなかった．それは1915年に至ってハルトークスにより証明されたのである［35］．

なお，整列定理から選択公理を導くことは容易である：

定理 9.1　ZF＋整列定理 において選択公理が成り立つ．

* **証明**　集合 T の各要素が空でない集合であるとする．整列定理によって集合
♯ $\bigcup T$ を整列する．その整列順序を $<$ としよう．各 $A \in T$ に対し，A の要素で $<$ について最初のものをとり——それがツェルメロの“識別された要素”な
⁑ わけである——それらを集めて集合 S_1 を作る．S_1 は T の選択集合である．□

この証明で定義された S_1 が“集合をなす”ことは，万人の認めるところであろう．素朴集合論では，集合の定義が明確でないから“認めるであろう”というような言い方しかできない．しかし公理的集合論ならば，このような S_1 が“集合として存在する”ことを証明できるのである(もちろん整列定理の成立を仮定しての話である)．

ツェルメロが行なった，選択公理から整列定理を導くことは，超限帰納法の原理を確立しておけばいっそう簡潔に見通しよく行なうことができる．上述のツェルメロの証明も結局は超限帰納法に基づいているのであるが，当時は未だ理論が十分整備されていなかったので多少のゴタゴタは止むをえないところで

ある．公理的集合論での証明については［15; §3.9］を参照されたい．

§10　ツェルメロの証明に対する反応

ヒルベルトは編集委員として数学年報にツェルメロの論文［57］を発表すると同時に，フランスのエミール・ボレル——彼は数学の展開に積極的に集合論を利用した最初の数学者である［2］——にこの論文に対する批評を依頼した．同年（1904年）12月，ボレルは“集合論の原理についてのいくつかの注意”という標題の小論文［27］を草して，数学年報へ送った．ボレルの主旨はこうである（61～62ページに全文がある）．

「ツェルメロがなしたことは，二つの問題

（a）任意の集合 M を整列することができること

（b）任意の集合 M の空でない各部分集合から識別された一要素を選ぶこと

が同値であることの証明である．（a）と（b）の同値性が（a）への一般的解決を与えるということを証明したわけではない．実際，与えられた集合 M に対し問題（b）が解けるためには，M の任意の部分集合 M' から識別された一要素 m' を決定するための手段を——少なくとも一つの理論的手段を——必要とする．そしてこの問題は，限定のためたとえば M が実数連続体 $\mathscr{R}$ であるとしたとき，最も困難なものの一つであるようにみえる．」

これに対し，ツェルメロは整列定理の別証明（もちろん選択公理を仮定して）を与えた論文［58］の中で，次のように反論している：

「… 私は，あのノートの末尾でわざわざ強調しておいたように，この選択公理（Auswahlpostulate）が証明できないから，したがってだれにもそれを必然的なものとして容認させることができないので，そういった反論はある点までは正当であると結論する．したがって，もしボレル（1905）とペアノ（1906）が彼らの批評において選択公理の証明が欠けていることに注目したとするならば，彼らは単に私自身の観点を採用したにすぎないこ

とになる．彼らは，私が主張していた証明不能性を，すなわちこの仮定が他のものと論理的に独立であることを，彼らなりに確証し，それにより私の確信を強めてくれたので，私は彼らに感謝しなければならないだろう．

数学においてさえ証明不能性は，ご承知のように，けっして非妥当性と同値ではない．なぜなら，とにかく，すべてのものが証明されうるわけではなく，かえってどの証明もまだ証明されていない原理を予め仮定しているからである．だから，このような基本原理を否認するとしたら，ある特別な場合にそれが成立しないことをつき止めるか，または矛盾する結論を確証するかしなければならないだろう．しかるに，私の対立者のだれもこのことをしようと試みていない．」

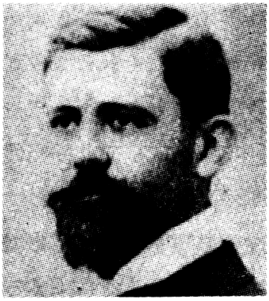
続いてペアノの反論――ペアノは，選択公理がペアノの数学体系（Formulaire de Mathématiques (1895)）において証明することができないからと言って，ツェルメロの証明に反対した――に対する論駁を書いた．ツェルメロはペアノの所論を手厳しく批判したのである．この後に選択公理の応用を7例あげたので，それをここに紹介しよう：

（1）　ベッポ・レヴィの類別原理：集合 M が互いに素な空でない部分集合 $A, B, C, \cdots$ に分割（類別）されるならば，これらの類の集合は M のある部分集合と同等である．すなわち，類の集合の濃度は $\overline{\overline{M}}$ に等しいか小さい．――これを証明するためには，各類とその一要素とを組み合わせなければならない．

（2）　$A, B, C, \cdots$ は互いに素，$A', B', C', \cdots$ も互いに素で，$A \sim A', B \sim B', C \sim C', \cdots$ ならば，和集合は同値である：$A \cup B \cup C \cup \cdots \sim A' \cup B' \cup C' \cup \cdots$．――基数の全計算法則がこの定理に基づいている．

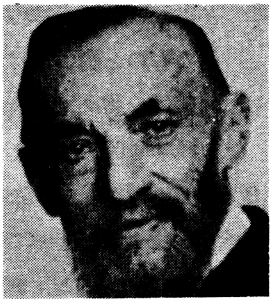
（3）　基数の積は，その一因子が0のときに限り0である．――これは今様にいえば「$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \phi$ であるのは，すべての $\lambda \in \Lambda$ について $C \cap A_\lambda$ がちょうど一要素からなるような集合 C が存在するときに限る」となり，まさしく選択公理そのものといえる．

（4）　真部分集合と同等でない集合は，その各部分集合が最初と最後の要素をもつように順序づけることができる．――これも今様にいえば，「デデキント



←ボレル

ペアノ→



有限集合は有限集合である」となる.

（5） 有限または可算な集合の可算個の和集合はやはり可算集合である.——可算集合の理論や第2級順序数の理論は，この定理に基づいている.

（6） すべての実数の集合 $\mathscr{R}$ に対する“基”（ハーメル基）が存在する.——$H\,(\subseteq \mathscr{R})$ がハーメル基であるとは，「1°）H の任意の有限個の要素 $x_1, \cdots, x_m$ は一次独立である；すなわち，有理数 $r_1, \cdots, r_m$ に対し

$$r_1x_1 + \cdots + r_mx_m = 0 \iff r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0,$$

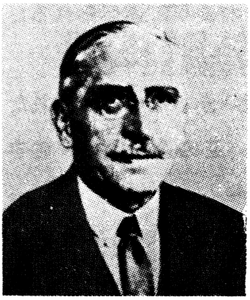
2°）y を0でない任意の実数とすれば，H の中から適当に有限個の要素 $x_1, \cdots, x_n$ と有理数 $r_1, \cdots, r_n$ とを選んで $y = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$ と表すことができる」ときにいう．ハーメルが次項（7）を証明するために案出した定義である［34］.

（7） 関数方程式

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

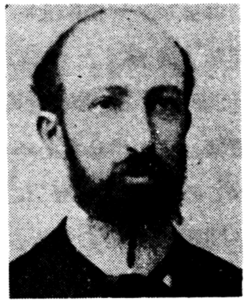
を満足する不連続関数 f が無数に存在する.——連続関数に限れば，この方程式をみたす f は $f(x) = cx$ しかない．ただし c は任意の定数．ハーメルは，ハーメル基を整列定理から導き，これによって上記の関数方程式が無限に多くの解をもつことを証明した［34］.

ツェルメロは［58］において上記（1）～（7）を列挙しその各々に短いコメントを付した．さらにこれに続いて，非可述的定義（たとえば［15; p. 32］，そこでは impredicative を“非述語的”と訳したが，“非可述的”の方がよいと思う）の使用に対するポアンカレの批判や，ブラリ・フォルティの逆理への抵



← ルベーグ

アダマール →



触に関する批判等々に答えている.

ここではこれらにはふれない. 代わりに, 当時フランスの新進気鋭の数学者ボレル, ルネ・ベール, アンリ・ルベーグ, それにやや年長のジャック・アダマールが選択公理をめぐってとり交わした五つの手紙が, ボレル著［2］の第2版（1914）以降の版に集録されているので, それを紹介しよう. おそらく, 1904年から1905年にかけてとり交わされた書簡であろう. 1904年12月と日付けされたものがあり, またこの五つの手紙はフランスの雑誌 Bulletin de la Société Mathématique de France の1905年号に掲載されているからである［22］. たどたどしく拙い直訳であるが, お許し願いたい.

その前に, ボレルがドイツの数学年報（ツェルメロのあの論文が載った雑誌）へ編集者ヒルベルトの要請によって投稿した論文［27］を紹介する. “五つの手紙”は, ボレルのこの論文がきっかけの一つになっているからである.

集合論の原理についてのいくつかの注意

エミール・ボレル　パリ

（数学年報, 60巻（1905), pp. 194–195）

この雑誌の編集者が私に送るのを望んだ依頼によって, 私はツェルメロ氏の興味あるノート（数学年報, 59巻（1904), 514–516）により示唆されたいくつかの意見を簡単に要約しよう.

ある集合 M に関し起こりうる最も重要な問題の一つは次のことである:

A.—— **M を整列集合の形にすること.**

ツェルメロ氏によって得られた注目すべき結果は，次のように述べられる：問題Aを解くためには次の問題Bを解くことができれば十分である：

B.―― **M の任意の部分集合 M' が与えられると，M' からその識別された要素と名づけられる一要素 m' を一定の方法で選ぶこと．この選択は，M のすべての部分集合 M' に対し行なわれる．**

問題Aのどの解も，問題Bの特別な解を与える．しかし逆は明らかでない．**問題AとBが同値である**ことを知ったのは，ツェルメロ氏によってである．

しかしこの結果は，その利益がなんであろうとも，問題Aの一般解を与えるものと考えることはできないであろう．実際，問題Bが与えられた集合 M に関して解けると考えられるためには，任意の部分集合 M' からその識別された要素 m' を決定することによって少なくとも理論的手段を与えることが必要である．そしてこの問題は，考えをハッキリさせるために，M が実数連続体であると仮定するならば，非常に困難であるようにみえる．

実際，ツェルメロ氏がほのめかした次のような推論を有効と考えることはできない："特別な集合 M' において，識別された要素 m' を**任意に**選ぶことが可能である．集合 M' たちの各々に対し行なうことができるこの選択は，これらの集合全体の集合に対しても行なうことができる．"

このような推論は私には，"集合 M を整列するために，一要素を任意に選び，それに階数1を割り当てる，次に他の一要素を選びそれに階数2を割り当てる，…… このような選択を超限的に続けること，すなわち超限数の列に従って M のすべての要素を汲み尽すまで行なうこと，が十分である"という論法をよりよく基礎づけしているようには思えない．ところで，どんな数学者もいまの推論を有効とは考えないであろう．私には，それに対立させうる反論は"任意選択を非可算無限回行なうことを仮定するようなすべての推論"に反対すること，に相当するようにみえる．このような推論は数学の領域の外にある*)．

パリ　　1904年12月1日

原註*)（モンペリエの）ベール氏の手紙から数行引用することをお許しいただきたい．それは私が非常に正当であると信じ，また疑いもなく広まっている意見を，非常に明瞭に要約

していると思う："私個人としては，連続体（あるいは種としては同じこと[1/]ですが自然数列全体の集合）と整列集合との間には決して共通点はありえない，というような議論を疑います．私にとりましては，二つのものがあって，どちらも潜在的に定義されているだけのもの，ということです．そして，この二つの潜在性は還元不能であるという可能性があります．"

訳注 1/　$\mathscr{R}$ と ${}^{\omega}\omega$ とが同等（p.27）であるという意．

§11　集合論に関する五つの手紙

I.　ジャック・アダマールからエミール・ボレルへ

数学年報の前巻に現れたツェルメロの証明に対する貴君の反論（数学年報，60巻，2号）を興味深く読みました．しかし，私はこの問題について君と意見が分かれます．まず，ツェルメロが出発点として使った事柄と，集合の要素を次々に番号づける――この番号づけは超限的に続けられる――ことに在る論法とが同じだとした君の見解に，私は同意しません．実際，二つの場合の間には根本的な相異があります：後の方の議論は，その各々が前に行なった選択に依存するような選択の系列を容認します．超限的にそれを適用することが受け入れられないのはそのためです．私は，我々の観点で，問題になっている選択とツェルメロが言ったものとの間に設定すべきなんらの類似も認めません．それらは互いに独立です．

なおまた，それは貴君が使用を認めない非可算回の選択の場合にもあります．しかし，私としてはこの点について非可算個の場合と可算個の場合との間に違いが見えません．もし問題の選択（たち）の間になんらかの依存関係があるならば，あの相違は明らかでしょう．なぜなら，人がそれを実行する場合には順序を考慮しなければならないからです：私には独立な選択たちの場合，それがもう一度全く消えてしまうように思えます．

確かなことは，ツェルメロが，彼が言った操作をエフェクティヴに実行するなんらの方法をも与えなかったということ，および，後々だれかがこのような方法を指定することができるとは依然として疑わしいということ

です．たしかに，この形でその問題を解くのはたいへん興味あることでしょう．しかし，このように設定された問題（求められている対応のエフェクティヴな決定）は，それにもかかわらず我々が検討している事柄（このような対応は存在するか？）と全く異なっています：タンヌリが言った，“定義されうる対応”と“記述されうる”対応との間に存在する相違——それは根本的な相違です——は，すべてそれらの中にあるのです．もし第一の言葉を第二のものでおきかえるならば，数学のいくつかの重要な問題がその意味を全く変えたり，その解が変わってしまったりします．しかし貴君は，収束円が自然境界になっている級数に関する重要な推論において，それを記述しないで，その**存在**を是認した対応を用いています：もし級数を，その形成の法則が記述できるような整級数に限るならば，先の見解（すなわち，収束円が自然境界になっている整級数は除外例であるということ）は，私の感じでは，真実と考えなければなりません．それはしかし，純粋に感覚の問題です．なぜなら“記述されうる”対応という概念は，貴君の表現を再びとるなら，“数学の外にあるもの”だからです．それは心理学の領域に属するもので，我々の精神の特質に関するものです．ツェルメロが用いた対応がいつか**実際に**定めることができるかどうかを知ることは，この種の問題なのです．

この対応の存在については，私には，与えられた集合から一要素を取り出すことの可能性に適うようにみえます．そして，それはちょうど次の命題 A が命題 B に対してもつ関係と同様なものです：

A.　数 x が与えられたとき，次のような数 y が存在する：y は x のどんな整数係数多項式によっても表すことができない．

B.　次のような x の関数 y が存在する：x の各値に対し，y は代数的数でもなく，x のどんな整数係数多項式によっても表すことができない．

そして，疑いもなくこのような関数を作ることができます．しかし私が要求することは，定理 B の正確さを確信するためにそれが少しも必要でないということです．私は，多くの数学者が，問題の定理を使用しなければ

ならないとき，私以上にはこんな苦労をしないであろうと信ずるものです．

J．アダマール

II．ルネ・ベールからジャック・アダマールへ

ボレルが私への手紙で，貴方がツェルメロのノートによって惹き起こされた重大な論争についての見解を述べられたことを，知らせてきました．それによって私が思いついた若干の熟考を貴方にお届けすることをお許し下さい．

御承知のように，私はあらましボレルの説に同調します．そしてもし私がそこから離れるとするならば，それよりさらに一歩進めようとするでしょう．

試みに，正整数の無限列全体の集合 M にツェルメロの方法を適用すると仮定しましょう．見分けられる一要素 m_1 を M から取り出します．集合 $M-\{m_1\}$ が残っています．それからまた見分けられる一要素 m_2 を取り出します，等々．これらの相つぐ選択は，たしかに各々が前のものに依存しています．しかし，貴方がツェルメロに従っておっしゃったように，選択（たち）は互いに独立であります．なぜなら，彼は出発点として，**M のすべての空でない部分集合の中からの識別された要素の選択**を許しているからです．このことは私には満足に思えません：私には，**非常に大きな困難の中へそれを沈めてしまうことによって**困難性を隠していると思えるからです．

与えられた集合という表現が絶えず用いられます：それは意味があるでしょうか？　私の考えではいつもそうとはいえません．無限集合について言うや否や（可算の場合でさえも，そしてこの点私はボレルより一層急進的であるよう努めています），手から手へ渡るビー玉の袋と同じと考えることは**意識的にせよあるいは無意識的にせよ**全く消えなければなりません．そして私見では，我々は**潜在的なもの**の中にいるのです．すなわち我々は，

一つの対象が新しい条項によって定義されたとき，後で我々にこの対象のある性質を主張することを認める規約を行なうのです．しかし，さらに一歩進めてみることは私には正当であるとは思えないと信じます．特に，集合が与えられるということによって（我々は，たとえば，正整数の無限列全体の集合を与えるということに同意するでしょう）**この集合のすべての部分集合が与えられたと考えることは，私には間違っていると思えます．**もっと強い理由で私は，一つの集合の各部分集合になされた選択を了解する，という行為に意味を与えること，を拒否します．

ツェルメロは“Mのすべての部分集合にそれらの各一要素を対応させると考えよ”と言いました．これは全く矛盾しない概念です．同様に，私にとりまして証明すべきことのすべては，我々が定義するどんな集合においても，その中にあるすべての要素が，ある整列集合の要素たちの間の関係と同一の位置関係をもつと了解することに矛盾が現れない，ということです．こうしたわけで，すべての集合を整列された集合の形にすることができると述べるためには，これらの言葉に異常な拡張解釈を，そして付言しますが，虚偽の拡張解釈を，与えなければなりません．

前述のことは私の考えを全く不完全に表したにすぎません．私はある文の中に（それはボレルが彼のノートの中に引用したいと思っているもの[1]です）私の見解を述べました．私にとりまして，この順序での思考の進展は定義可能なものの領域に限定することにあります．そして結局は，外見のいかんにかかわらず，すべてのものが有限に還元される必要があります．

1904年12月　　　　　　　　　　　　　　　　R．ベール

Ⅲ．アンリ・ルベーグからエミール・ボレルへ

貴方は私に，ツェルメロのノート（数学年報59巻），貴方がそれになさ

1/　おそらく，前記ボレルの論説の末尾に付された原註のことであろう．

れた御批判（数学年報60巻）および貴方が私にお知らせ下さったアダマールへの手紙，などについて私の意見を述べるように求められましたので，ここに御返事いたします．長くてすみませんが，それを明らかにしたいと存じます．

まず，私はそれについて貴方に同調します：ツェルメロは

「問題A　集合 M を整列された形にすること

は，

問題B　集合 M の要素から作られた各集合 M' [1/] に M' の特別な要素 m' を対応づけること

を解くことができるときに，解くことができる」

ということを，非常に巧妙に証明しました．

不幸にして，問題Bは，整列できる集合を除けば，解くのが容易ではないように思えます．したがって，問題Aを一般的に解くことはできません．

少なくとも，集合 M を定義するということは，カントルがそうしたように，すでに定義された集合 N のある要素たちが所有していてしかも定義によって M の要素たちを特徴づけるようなある性質を指名することである [2/]，と仮定しますと，私はこの問題に一般的解を与えうるということに甚だ疑問を感じます．実際この定義によっては，M の要素について，それらが N の要素たちの**未知の**性質すべてをもち，しかもそれらは**未知の**性質 [2/] P をもつもの全部である，ということ以外には何も知りえないのです．そこでは，M の2要素を区別することができません．ましてやそれらを類別することもできません．なぜなら，問題Aを解くためにそのことをなさなければならないからです．

1/　そのころはまだ“空”という言葉が使われていなかったようである．M' は“M の要素から作られている”のでこのことは“空でない”という意味を含んでいるわけである．

2/　現在の記法を用いて言えば，$M=\{x\in N \mid P(x)\}$ となる性質 P を指示すること．多くの場合 P を与えて初めて M が確定するのだから，P が先にあるのであって，「**未知の**性質 P」と言っているのは少しおかしいと思われるかもしれないが，素朴な立場では M が先にあるとも考えられる．

問題Aの解へのすべての試みに対しア・プリオリになされたこの異議は，N あるいは P を特殊化するならば，もちろん解消します．たとえば N が自然数全体の集合ならば，この異議は消えます．一般に，期待できると思えるのは，Aの解を導き，ある特別な場合に可能であるBのような(問題)，しかもしばしば出あう問題を指示するぐらいのことだけであります．私見では以上のことがツェルメロの推論の利点であると思います．

アダマールは，問題Aのエフェクティヴな解ではなくてAの解の存在証明の試みであるというツェルメロのノートに対する解釈に，貴方よりもずっと忠実である，と私は思います．問題はほとんど新しくない“定義なしに数学的実体の存在を証明することができるか？”に還元されます．

これは明らかに規約の問題です．しかし，実体を定義しながらその存在を証明しないようなことを許しては，確実に築けるはずがないと信じます．この観点では，それはクロネッカーとドラッハの見解に似ていますが，問題Aと

問題C　すべての集合は整列されるか？

とを区別することができません．

もし私の指定する規約が一般に是認されるものならば，もはや何も言うことはありません．しかし私は，人が他の意味で**存在**という言葉をたびたび使っており，そして私自身もしばしば使っていることを告白しなければなりません．たとえば「非可算個の実数が存在する」というカントルのよく知られた推論を解釈するとき，しかしながらこのような無限のものを指名する方法を与えていません．貴方がおっしゃる通り，可算個の実数を与えるごとに，この無限集合に属さない実数を定義できる，ということが示されているにすぎません．(“定義する”という言葉はいつも**定義されるものの特徴的な性質を指名する**という意味をもちます．)　この種の存在は推論において次のようにして活用させることができます：ある性質は，もしそれを否定することが実数全体を可算列に並べることを可能にすることへ導くならば，正しい．私は，この方法による以外それは起こりえないと思います．

ツェルメロは，M の空でない部分集合たちとそれらのある要素たちとの間の対応づけの存在を利用しました．この対応の存在が将来証明されるであろう方法によれば，その存在が疑問の余地のないようになるとしても，ツェルメロがそうしたように，この存在を利用する権利がある，ことは明らかでないらしいと，貴方にはおわかりのことと思います．

私は，貴方が“特別な集合 M' の中に識別された要素 m' を**任意に**選ぶことが可能である；この選択は，集合 M' の各々に対しなされるがゆえに，この集合全体の集合に対してもできる”と述べられた推論に到達しました．それによって対応の存在が生ずるようにみえます．

まず第一に，M' が与えられるとき，m' を選ぶことができるのは明白でしょうか？　それは，もし私が前述したようにほとんどクロネッカー的意味で M' が存在するならば，明らかでしょう．なぜなら，M' が存在するということは，その要素のあるものたちを指名することができることを確認することだからです．しかし私は，**存在する**という言葉の意味を広げてみましょう．アダマールとツェルメロにとっては，部分集合 M' と識別された要素 m' の対応全体の集合 Γ がたしかに**存在**します．後者は生産された超限によって，それら要素たちの個数さえも表します．しかしながら，Γ の要素を選ぶことができるでしょうか？　明らかに否です．なぜなら，それは M に対する問題Bに確定した解を与えることになるからです．

私が**選択する**という言葉を**指名する**という意味で使うことは正しいでしょうし，またツェルメロの推論のためには，**選択する**ことは**考える**を意味するということがたぶん十分である，というのは正しいでしょう．しかしながら，その考えるものをさし示していないということ，そしてそれにもかかわらずツェルメロの推論においては**対応が常に同じものを決定する**と考えることが必要であるということは注意しなければなりません．アダマールは，一つの（そしてただ一つの）要素を決定できることを証明することが必要でない[1]と信じているようにみえます．私見では，評価の相違が現れるの

1/　ボレルの本ではここが**肯定**になっている．Bulletin の原文には**否定**詞がついている．

はそこからであると思います．

私にみえる困難さを貴方にいっそう強く感じていただくために，私は貴方に，私が学位論文において（非クロネッカー的意味で，そしてたぶん正確にすることが難しいという意味で）ボレル集合でない可測集合の存在を証明したことを思いだしていただきましょう．しかし，そのような集合をけっして指名することができなかったということは，私にとって疑わしさを残してしまいました[1/]．これらの状況下で，**ボレルでない可測集合を選ぶと仮定します**，——誰もそれをけっして指名できないと私が疑っているのにです——そういう仮定の上に推論を基礎づける権利が私にあったのでしょうか？　　1/　p.239 の 1)を参照．

このようにしてすでに私は，この“決定された M' の中から決定された m' を選ぶことができる”という議論の中に困難さがあるとわかりました．なぜなら，その中から一要素を選び出すことがたぶん不可能であるような集合（たとえば，非常に一般な集合から生ずる部分集合 M' と考えられうるような集合 C）が存在するからです．次に，無限個の選択に関して貴方が御指摘のような困難さがあります．それは，もしツェルメロの推論を全く一般なものと考えたいならば，無限個の選択——たぶん大きな濃度の無限個になるでしょう——について語るのを許さなければならないようになります．さらに，この無限個に対する法則も与えられないし，無限回の選択に対する法則も与えられていません．（空でない）部分集合 M' たち全体の集合の濃度（個数）と同じだけある選択(たち)の集合を定義する法則を指名することが可能かどうか知りません．また M' が与えられたとき，m' を指名することができるかどうかも知りません．

まとめますと，ツェルメロの推論を念入りに検討するとき，さらに集合について一般ないくつかの推論のように，それに意味を与えるためにはそれがあまりにも非クロネッカー的でありすぎると思います(もちろん少なくとも問題Cの解の存在証明の資格でですが)．

貴方は“集合を整列するためには，それから一つの要素を選出し，次に

また他の要素を選出する，等々 … ということが十分である”という推論をほのめかしました．この推論が，少なくとも外見上は，ツェルメロの推論よりもさらに大きく並はずれた困難を示す，ということは確かです．そして私はアダマールと共に，次々の互いに関連する無限回の選択が，順序づけない独立な無限回の選択によっておきかえられたことは進歩であると信じたいと思います．たぶんそこには錯覚があるだけです．たぶん外見上の単純化が，逐次無限回の選択を順序を考慮しない無限回の選択 ——しかしより大きい濃度の無限回の選択 —— でおきかえねばならないという事実に起因するだけです．そういう次第で，貴方が引用された単純化されすぎた推論のすべての困難性を，ツェルメロの推論の初めにおかれたただ一つの困難性に還元することができるという事実は，たぶんこのただ一つの困難さが極めて大きいものであるということを示しているだけです．ともかく私には，順序を無視した独立選択たちの集合が問題だからという理由で，それが消えてしまうとは思えません．たとえば，もし私が任意の x に対し y が x から整数係数代数方程式によっては与えられないような関数 $y(x)$ の存在を信ずるとするならば，それは私がアダマールと一緒に，このような関数を構成することが可能であると信ずるからです．しかし私にとりましては，それは，任意の x に対し x の整数係数代数方程式では表せない数 y たちの存在の直接的結果ではありません*)．

法則を与えずに無限回の選択について語らなければならないという困難が重大である，と表明する場合は，可算無限が問題であろうとなかろうと，私はアダマールに全く賛成します．貴方が“集合 M' たちの各々に対しなされるこの選択は，これらの集合全体の集合に対してもできうる”と批判なさった推論におけるように言うとき，もし使われた用語を説明しないならば，何も言いません．一つの選択を行なうことは記述されるか，選ばれ

原註*）　ゲラ刷りの校正中，私は「それによってアダマールの陳述 A を一般に正当化する推論は，実際陳述 B を同時に正当化すること」をつけ加えました．私見では，A を正当化することが B を正当化することになるからです．

た要素を指名することができるかいずれかです．無限回の選択を行なうことは記述することができませんし，選ばれた要素を一つひとつ指名することもできません：人生はあまりにも短かすぎます．したがって，何が行なわれるかを言わなければなりません．一般に，それによって選ばれた要素たちを定義する法則を与えるということを理解します．しかし，可算無限が問題であろうとなかろうと，この法則は，私にはアダマールにとってのように，必要不可欠であります．

しかしながら，もし私が2種の無限の間の理論的相違を確立しないならば，実際的観点からそれらの間に大きな差別を設けますから，この点で私は再び貴方に賛成するでしょう．超限回の選択を定義する法則について語られるのを聞くとき，私はこれを非常に疑っています．なぜなら，このような法則をけっして見たことがないからです．これに反し，私は可算回の選択を定義する法則を知っています．しかし，これは慣習にかかわる問題です．そしてよく考えてみますと，ときどき，超限回の選択を行なう推論におけると同様に，私見では，可算回の選択しか行なわない推論においても重大な困難さがみえます．たとえば，もし古典的推論によって，可算より大きい濃度のすべての集合がカントルの第2級超限順序数全体の集合と同じ濃度（$\aleph_1$）の部分集合を含むということを確証したものと考えないならば，私は有限でない集合が可算部分集合を含むことを証明する方法にも価値を与えません．有限でもなく無限でもない集合がいつか指名されるだろうということを私は強く疑問に思いますけれども，このような集合の不可能性が証明されるようには思えません．しかし私は貴方にこの疑問についてすでにお話ししました．

H．ルベーグ

IV．ジャック・アダマールからエミール・ボレルへ

ルベーグの手紙によって，問題はいまや全く明らかになりました．それ

はますます明瞭にタンヌリの論文で説明された**決定される**ものと**記述されるもの**との間にある相違の中にすべて入ってしまいます．

この点でルベーグ，ベールそれに貴君はクロネッカーの見解を採用しています．これまではそれが特殊なものであると私は信じていました．貴君らはルベーグによって提出された問題（p. 68）：定義することなしに数学的実体の存在を証明することができるか？に否定的に答えました．私はイエスと答えます．言い換えれば，私は自分自身のために，集合 Γ に関する異議に対してルベーグ自身の返答をとります．

少なくとも目下のところ，**我々**にはこの集合の一要素を**指名する**ことが不可能であることを認めます．この点は貴君らのための問題で，私のためのものではありません．

ルベーグは首尾一貫していないように思えるという点があるだけです．これは，対象の存在をそれが証明された方法に従って利用する権利を自分に認めるかまたは認めないかというときのことです．私にとっては，彼が言っている**存在**は他のすべての存在と同じものです．さもなければ，存在は起こりません．

この問題はベールに対しても同様に生じます．私は，彼がしたようにヒルベルトの方式で，無矛盾であればよいという立場をとることを，あまり好みません．そのことは，私にはまた，心理学によって立て直したり，我我の脳の性質を考慮に入れたりするように思えます．我々が矛盾などに気づかないことをどのようにしてツェルメロが**証明する**ことができたのか，私にはよくわかりません．それは**証明**されないが**認められる**：人はそれに気づいたかあるいは気づかなかったかどちらかです．

この点は別にして，集合が整列できるかどうかを知るという主問題は，ベールにとっては（そしてルベーグと貴君にとっても同様に）明らかに私と同じ意味をもっていません．私はむしろこう言います：整列は可能か？と（そしてこの**人**がどんな人かを考慮しなければならないことを恐れては，その**人**に命ずることはできません）：ベールは言うでしょう：**我々は**整列

することができるか？ と．私見ではそれは全く主観的な問題です．

したがって，これは数学の二つの概念，対峙している二つの思考形式です．これまで言われてきたすべてのことの中に，私の考えを変えさせるような動機はなにも見あたりません．私はそれを押しつけることを望みません．せいぜい，雑誌**科学の一般評論**（1905年3月30日）の中で私が示した議論を好んで活用するぐらいのところでしょう．すなわち:

1°　この論争は，リーマンとその先駆者たちの間に起こった関数概念に関する論争と，結局は同じであると思います．ルベーグが是非とも必要とする法則は，リーマンの対立者たちが是非ともと要求する解析的表示*) に非常によく似ているようにみえます．そして，解析的表示についての問題はあまり奇妙ではありません．選択の際の**個数**は問題を変えないばかりでなく，**一意性**についても同様であるように私には思えるのです．“花嫁がきれいすぎる”からと不平を言うように“xの各値に対し … をみたす無限に多くの数がある，yをこのような数たちの一つとせよ …”と言うことができないのに，（私は）人が“xの各値に対し … をみたす数が存在する，yをこの数とせよ …”と言う権利をもつ，とは考えません．

2°　タンヌリの任意選択は，**我々**が定義することが**できない**数νたちへ導きます．私にはこのような数が存在しないとは考えられません．

ベルンシュタインによって提出された推論（数学年報，60巻，p.187）に関しては，そして結果としてツェルメロの証明への彼の異議のために，私としては，それを証明とは考えません．もっともこの意見は，我々が実際に議論する問題とは無関係です．

原註*）　もしすべての私の考えを言わなければならないのならば，私は論争の根底を形成するようにみえるこの観点を少しだけ強調しなければならないと思います．私には次のように思えるのです:　無限小解析のまさにその発明以来数学の真に本質的な進歩は，あるものはギリシア人にとって，あるものはルネッサンスの幾何学者たちに，あるいはまたリーマンの先駆者たちにとって，“数学の外側に”あった諸概念を次々に併合することにあったのです．なぜなら，それらは記述することが不可能でしたから．

ベルンシュタインは，**すべての**順序数の集合 W に関するブラリ・フォルティ氏の逆理（パレルモ数学サークル，1897）から出発します．ブラリ・フォルティ氏によりはっきりさせられたこの逆理から逃れるために，この順序数 W はそれに1を加えることができないものと仮定しましょう．この見解は私には容認し難いし，またベルンシュタインが好んでいる空想的な議論も同様に容認し難いものです．Wの要素たちと追加の要素との間に（カントルの理論によって）定められた順序（それは著者（ベルンシュタイン）が攻撃した順序です）は，いつも自由に作ることができて，しかも W の性質が，それが何であれ，どんな障害にもならないであろう，そういう純粋な**協定**にすぎません．

解決は別です．これは矛盾を導く集合 W の存在そのものです．その定義において，**集合**という言葉の一般的定義が間違って適用されています．予め存在する対象から集合を作る権利があるだけです．Wの定義がその反対を前提としていることは容易にわかります．

すべての集合の集合に対する同様な考察があります（ヒルベルト．ハイデルベルクの学会）．

最初の問題へもどりましょう．この観点からみれば，私は永久に我々の立場にとどまると思うので，もはやここには議論はなくて，貴君の原理からの結論があるだけです．

カントルは，区間（0,1）で値0と1のみをとる関数全体の集合を考えました．この集合は私には明白な意味をもつようにみえます．そして，その濃度はカントルが述べたように $2^{\aleph}$ です[1]．同様に，x の関数全体の集合も意味をもち，その濃度が $\aleph^{\aleph}$ であることは明らかです．

貴君にとってはこのような全体はどんな意味をもちますか？　私には，それがどんな意味ももちえないことが明白なように思えます．なぜなら，どの関数についても貴君が，それは**我々の**ために**記述的**であるべきだというような，数学的な意味をもたない追加条件を課すからです．

1/　ここで $\aleph$ は，連続の濃度すなわち $2^{\aleph_0}$ のことである．したがって，$2^{\aleph}$ は $2^{2^{\aleph_0}}$ である．

あるいはむしろ，それが意味することは次のことにあります：貴君の観点で，有限個の言葉で定義可能な関数のみを考えるべきであるということです．しかし，この理屈でいくと，いま上で作った二つの集合は**可算**集合となり，また他の可能な集合もすべて可算集合となります．

J．アダマール

V．エミール・ボレルからジャック・アダマールへ

…私は貴兄にまず5月4日の協会の会議でルベーグが行なった興味ある指摘をお知らせしたい：ツェルメロは彼の推論のさまざまなところで，識別された要素の**同じ**選択を行なっているが，**彼自身では**それをなんら特徴づけしていないのに，彼はどのようにしてそれを保証することができるのだろうか（ここでは，反論者がありうることさえ問題ではなく，自分自身と緊密であることが重要である），という指摘です．

貴兄の新しい異議に関しては，それに対する私の立場をここに示します．

私はアレフ数を書くことをあまり好みませんが，にもかかわらず私は，それらの本質的な価値についてほとんど暗示なしに，貴兄が言っていたものに同値な推論を行なうことに賛同します．しかしそれが，**よりいっそうまともな他の推論のために指針となりうると考えての上のことです．**実際的な例として，私の最近の小著（**実変数関数と多項式級数への展開についての講義**，モーリス・フレシェ編集）の末尾に加えたノート III を貴兄のために引用することができます．そこで用いられた推論は，私が前著**関数論講義***) の p.107 で報告したカントルの推論により明白に示唆されています．

私がこのノート III で採用した形は，私の本の最終ページの下部に指摘し

原註*）　この小著のノートIとIIで，貴兄が行使権を拒否した型の推論を私は絶えず行ないました．さらに，私はいつもためらいでいっぱいです．そして，二つのノートのどちらも非常に限定された文で終わっています．

ましたように，まだ全く満足なものとは言いかねます．しかし，ルベーグが**ジョルダン誌**（1905）に発表した論文で行なった類似の推論は，有限個の言葉で表示されうる正確な結果へ導くという意味で，全く申し分のないものと思います．それはしかしながら，カントルの推論の中にその起源があるのです．

絶対的に価値あるものとは考えられませんが，しかし究極的にはエフェクティヴな結果へ導くようなこの推論の実際的価値はなんであろうか，と自問することができます．というのは，もしそれがすべての価値を失っているとするならば，これは意味のない言葉の集まりなるがゆえに，それは何も導くことができないように思えるからです．私は，人はかようにあまりに厳格であると思うし，また数理物理学のある理論の価値，すなわちそれによって現実を表現することは望まないが，しかしまだこれから検証しなければならない新しい現象を類推によって発見することを可能にするようなある指針をもつことは望む，そういう理論の価値に類似な価値があると思います．この種の推論へ与えうる本当の厳密な意味は何かということを知るためには，相当な仕事が必要です．この仕事は無益であるか，または少なくともその有用性と全く不釣り合いです．あまりに抽象的なこの推論の具象性との関係は，必要が感じられるとき，それら自身によって明らかになるでしょう．

私は，すべての集合の集合について語るのは矛盾であるという事実については，貴兄と同調します．なぜなら，先ほど引用した p.107 の議論[1/]によって，より大きな濃度の集合を形成することができるからです．しかし私は，この矛盾は実際に定義できない集合を導入することに起因していると信じます．

Em. ボレル

1/　ボレルは［2］の pp.107−109 で，任意の集合 E に対し，E で定義され値が 0 か 1 である関数全体の集合 F は，E より大きい濃度の集合であることの証明を述べている．もちろんこれはカントルの論文［3; p.278］によるもので，本書の第 1 章§6 に紹介されている．

◎手紙の文中の敬称について．

ボレルは，これらの手紙を彼の本［2］の中へ集録した際 M.（＝Monsieur）をだいぶ削ってしまったようである．Bulletin に載っている手紙では，外国人には過去の人を除いてたいてい M. がつけてある．自国の人には大先輩を除いてほとんど M. をつけていない．しかし，ルベーグとアダマールの間では，他の人への手紙の中で，お互いに M. をつけている．この二人は当時それほど親しくはなかったものと思われる．本書では，ボレルの本に M. がついているときだけ“氏”を書き加えた．また，いちばん年長のアダマールはボレルに対し“tu”を使ったので“貴君”と訳した．ボレルもアダマールへの手紙で tu を使っているが，そこでは“貴兄”と訳すことにした．これらの人たちの生没年については，巻末の一覧表を参照されたい．

§12　現在の立場から

いままで読んできた五つの手紙から感ずるところを，若干述べてみよう．

まず第一に，当時は整列定理（すべての集合は整列することができる）を納得のいく推論によって“証明する”ことが問題であったことを，あげなければならない．ところが，「ツェルメロの証明はとても容認することができないような原理（選択公理）に基づいた推論によっているので，それは証明とは認め難い」というのが大方の意見であったようである．関連して，“集合を与える”とは何かという問題も加わって，事態をいっそう複雑なものにしてしまった．1905年の段階ではまだツェルメロの集合論公理系は現れておらず，推論のもとになる仮定も明確ではなかった．

まずボレルの注意であるが，彼は“集合 M を整列すること”という問題 A が解ければ，“集合 $\mathfrak{P}(M)-\{\phi\}$ の選択関数を作ること”という問題 B は解ける，しかし逆は明らかでなく，ツェルメロが初めてこれを証明したのだ，けれどもこのことは問題 A の一般的解を与えたことにはなりませんよ，と言う．それは，問題 B を解くことが困難だからである．これが主旨である．ごく当然

なことで，ツェルメロも問題Aを仮定なしに解いたとは言っていない．しかしツェルメロは，選択原理が数学で無意識に使用されており，またより簡単な原理に還元できそうもないので，この原理を認めてもよいのではないかと考えていたふしもある．ボレルは，選択原理はとうてい“認め難い”と主張したわけである．

アダマールはボレルへの手紙で，前の行為に依存する選択系列の存在とツェルメロの選択原理とは根本的に違うと主張する．さらに，M の部分集合 M' とその識別された要素 m' との対応のさせ方に関し，“対応が存在する”ことと“対応をエフェクティヴに与える”こととは全く異なっていることを，タンヌリの言を引用しながら，主張している．前者は“論理的に存在する”ことであり，後者は“具体的に記述的に与える”ことを意味するのであろう．そして，後者は心理学的問題だという．その意味は“エフェクティヴに与える”ということが明確でなく，そこに心理的要素が入り込むということであろうか．1930年代に数学基礎論において，数論的関数（自然数から自然数への関数）について**エフェクティヴに計算できる関数**が問題になり，エフェクティヴの意味をめぐって同様な問題が生じた．しかし，こちらはチャーチの提唱によって**一応**結着がついている（たとえば[18]）．集合論におけるエフェクティヴィティの問題も，実数連続体上の集合論に関しては，クリーネや特にアディソンによってチャーチの提唱の一般化に基づき，エフェクティヴ記述集合論として一応の解決に到達していると言ってよいであろう．エフェクティヴ記述集合論の邦語解説書は未だない．[7, 第36項]，[14]にごく概略的な記事がある．

話が少し横道にそれたかもしれない．アダマールの結論は「選択関数の存在は，与えられた集合から一要素を取り出すことの可能性と同等のようだから，認めてもよいではないか」ということのようにみえる．“一要素を取り出すこと（de prendre un élément）”が何を意味しているのかは問題であるが，数学において，空でない集合 A が与えられたとき，A の一要素を使ってある結論をひき出すことがよく行なわれる．このとき証明の中では，“A から一要素 a

を取り出す”という論法を使うであろう．これは選択公理とは関係なく，論理における正しい推論である（§16参照）．

このようなわけで，個々の議論としては“与えられた集合 A からその一要素を**取り出す**ことができる”としてよい．しかし，この取り出しに一種の“一様性”を課すと問題が生ずる．T が空でない集合 A たちの集合であるとき，各 A からその要素 a を一つずつ取り出すとなると，取り出した要素 a たちをまとめたものが集合でなければ，これらを全体として集合論で取り扱うことはできないわけである．選択関数の存在は，これが集合として存在することを保証するのである．アダマールはここまでは考えていなかったのではないか，そうとすれば彼が**同等**と言ったのは正しくないと言わなければならないから．しかし，アダマールの真意は知るよしもないから，筆者の“きめつけ”は見当違いかもしれない．

ベールの主張は，ボレルと同様に，ツェルメロの証明は満足でないということである．アダマールが言う依存選択は外見上だけで，最初に選択関数を許しておくのだから独立選択である；ツェルメロの証明は，整列問題を他の困難な問題にすりかえたものにすぎない；だから満足でない，というのである．また“与えられた集合”というものはいつも意味があるとはいえず，しかも“集合が与えられた”といっても，それはその集合のすべての部分集合が与えられたとはいえない．さらにベールは，ツェルメロの選択原理を“矛盾しない”概念だと述べ，定義された集合に対する整列定理の成立を無矛盾の意味で捉えているようである．そして，“すべての”集合について整列定理が成立するというのは“拡張解釈”だと断定している．

ツェルメロが行なっている選択は依存選択ではなく**独立選択**である，というのは当たっている．“依存選択”というのは次のような選択をいう：

二つの集合 X, Y について，$\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$ は第1章§4で定義したものである．これを簡単に

$$X \prec Y$$

で表そう．α を任意の順序数とする．

DC(α)
R が集合 X の部分集合 Y たちと X の要素 x たちとの間の関係で，条件

$$\forall Y \subseteq X\,[Y \precneq \alpha \Longrightarrow \exists x \in X\, R(Y, x)]$$

をみたすものであれば，次のような関数 f が存在する：

$$f : \alpha \longrightarrow X, \qquad \forall \beta < \alpha\, R(f``\beta, f(\beta)).$$

ここで，$\beta < \alpha$ は β が α より小さい順序数であることを表し，$f``\beta$ は $\beta = \{\gamma \mid \gamma < \beta\}$ と考えたときの値集合を表す：

$$f``\beta = \{f(\gamma) \mid \gamma < \beta\}.$$

特に α として $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ をとれば，DC(ω) は次の命題と同値になる：

DC
R が $\mathrm{rng}(R) \subseteq \mathrm{dom}(R)$ をみたす空でない関係ならば，次のような関数 f が存在する：

$$f : \omega \longrightarrow \mathrm{dom}(R), \qquad \forall n \in \omega\, R(f(n), f(n+1)).$$

ここに $\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y\, R(x, y)\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{y \mid \exists x\, R(x, y)\}$.（ただし，この DC では R の性格を少し変えてある.）

上の DC（$=$DC(ω)）を，通常**従属選択公理**（Axiom of Dependence Choice）と呼んでいる．このように従属とか依存とかいう場合は，選び出される要素 $f(n+1)$ が前に選出された要素 $f(n)$ と一定の関係 $R(f(n), f(n+1))$ にあるときである．手紙の中で述べられたような $a_1 \in M$, $a_2 \in M - \{a_1\}$, $\cdots$ という選択は，a_i と a_{i+1} との間に一定の関係を課するものとはいえないであろう．予め与えられた選択関数 g によって $a_{i+1} = g(M - \{a_1, \cdots, a_i\})$ と選ばれており，a_{i+1} と $a_1, \cdots, a_i$ の間に特別な関係があるわけではない．

従属選択と選択公理との関係について，

$$\text{選択公理} \Longrightarrow \forall \alpha\, \mathrm{DC}(\alpha)$$

は明らかであろう．与えられた集合 X を整列定理によって整列しておき，$\beta < \alpha$ に対し $f(\beta)$ を $x \in X \wedge R(f``\beta, x)$ となる最初の要素 x であると定めれば，f は所要の関数である．実は，その逆

$$\forall \alpha\, \mathrm{DC}(\alpha) \Longrightarrow \text{選択公理}$$

も成立するのであるが，紙数の都合で割愛する．

ところで，ベールは無矛盾性の問題として整列定理を把握した．当時未だ公理的集合論はなかったが，すでにヒルベルトの“幾何学基礎論”が公刊されており，またヒルベルトの“論理学と算術の基礎づけ”も現れていたので，ヒルベルトの無矛盾性による基礎づけにベールは賛同したものと思われる．後世の結果からみて，なかなか先見の明があったと言うべきであろう．

さらに，ベールは手紙の結語で「すべてのものは有限に還元されねばならない」と主張している．これは“有限的に定義可能”すなわち“有限個の言葉で述べられる”もののみを存在する対象として認めるという，フランス半経験主義の主張の“はしり”であろうか．あるいは，それ以前にボレルがすでにこのような態度で臨んでいたかもしれない．当時の他の文献を調べればなにかつかめるであろうが，不精して調べていないので確かなことは言えない．これについては，次のルベーグの手紙の項で再び言及しよう．

ルベーグは，ツェルメロの選択原理に関連して，定義とか存在という概念の考察について多言している．当時は整列定理を，その時点で許容され使用されている推論によって“証明する”ことが問題であったから，それにツェルメロの選択原理が容易には解けそうもないので，ルベーグも整列定理は依然として解けていないと主張する．そして，識別された要素が定義された実体でないことに絡めて，このような対象の存在を証明できるのかと疑問を投げかけている．さらに，対象を“定義する”とか，対象が“存在する”ことの意味を考察し，**指名する**（nommer）という言葉を新たに使いだした．同じころ書かれた論文［44; p.205］で，ルベーグは次のように書いている：

「私はエフェクティヴに定義することなしには関数について語るまいと努める」

「対象は，それにしかもそれだけに当てはまる有限個の言葉が述べられるとき，定義される，あるいは与えられる．すなわち，その対象を特徴づける性質が**指名**されるときである．」

というわけで，そのころ数学の対象が定義されるとか与えられるとはどういう意味なのかが問題になっていたことは確かである．ツェルメロの選択公理をめ

ぐる論争がそのきっかけになったのか，それともそれ以前からそういう問題があったのかはわからないが，集合論に逆理が発見された直後であるだけに，諸概念を明確にしようという気運は熟していたに違いないと思う．

ルベーグは事を“指名”という言葉へ転換してしまったが，さて指名とはどういう意味なのか．ルージンの本［62; p.20］から引用しよう：

> 「… ルベーグは，彼が創った新しい概念——論理的に定義することができないようにみえるが，ただ一つの動詞**指名する**によって表される概念——によって，それを肯定的に解こうと努めた …
>
> 我々は“指名する”という言葉の定義を与えようと試みない：我々には，それの**定義**が少なくとも無益であるほど十分に原始的な概念がそこにあるようにみえる．この言葉の意味は，例によって明らかにしようと意図することができるだけである．関数や集合を**指名する**ことは：その関数を，個別的な方法で，考えうるなんらの曖昧さもなく，**一意的な**仕方で示すことである．」

述べている気持はわかるが，所詮このような概念は明確に定義できるものではない．どこまでいっても疑問は尽きない．ヒルベルトはこのようなことを先見していたのであろう，無定義術語を押し立てて形式的公理論をすでに創案していたのであった．今日では——もちろん形式主義だけではカバーできない直観的数学はあるものの——公理的集合論に訴えるならば，ルベーグが指名可能と考えていた集合（ボレル集合やススリン-ルージンの解析集合など）は相対化された構成的集合（たちの一部分）としてかなり明確に把握することができる．しかし，これについて解説した邦語の成書はまだない．［14］，［17; p.168, p.190］が少し参考になるであろう．構成的集合については第4章で解説するが，［15］,［17］には詳細な展開がある．（補遺 II を参照）

なお，ルベーグは手紙のおしまいのパラグラフで，可算選択に心情的に賛成しているように受けとれる発言をしている．このことが彼の心に潜在していたためであろうか，彼はルベーグ測度論において無意識にこれを使ってしまったのである（次章§13を参照）．

次に，アダマールの二つめの手紙へ移ろう．アダマールはここで5人の人たちによって論じられたいろいろな問題を話題にする．識別された要素の問題から派生した“定義”の問題に，まず関心が向けられる．理想主義者のアダマールも，識別された要素が目下のところ**指名**不可能と認めている．次にベールとは反対に，アダマールはヒルベルトの無矛盾性による基礎づけに不賛成を表明している．無矛盾性の証明が非常に困難である——ある意味でそれは不可能である——と知られた現在の立場からみると，アダマールは賢明だったのかもしれない．しかし，ヒルベルトの考え方に賛同している人は多い．現在認められている集合論の公理体系（たとえばツェルメロ-フレンケルの集合論 ZF など）そのものの無矛盾性を証明する基盤はもっていないが，その体系が無矛盾であることを仮定すれば——そしてそれはほとんどの数学者の願望であろう——選択公理とか連続体仮説とかいった，たくさんの興味ある命題の相対的無矛盾性・独立性が証明される．また，自然数論の無矛盾性そのものの証明が，かなり安全と認められている基盤の上に確立されている．このような事実が，賛同への大きな理由の一つになっていると思う．

フランス語の辞書に“se plaindre que la mariée est trop bell”という文例が載っていて“花嫁がきれいすぎるとて不平を言う——喜ぶべきことを嘆く”と訳してあった．アダマールは波線部分だけを引用しているが，“不平を言う”を言外に意味して使ったものと思う．“… をみたす数がたくさんありすぎるから … となる数を選ぶのに苦労する”とでも言いたいのであろうか．たしかにこの場合は，このような数の個数が少ない方が選びやすいであろう．しかしアダマールは，そうであっても同様に苦労しますよ，と主張していると推測される．これに関して，現在，次のことが知られている：

A_1：　可算個の空でない集合の集合 T は選択関数をもつ

A_2：　可算個の空でない有限集合の集合 T は選択関数をもつ

とすれば，

$$A_1 \Longrightarrow A_2 \qquad \text{しかし} \qquad A_2 \not\Longrightarrow A_1.$$

したがって，有限集合たちであっても選択に苦労はするが（すなわち無手では

できないが），無限集合たちからの選択よりは楽であるといえる．だから現在の目からみれば，“同様に”苦労するというアダマールの言い分は当たっていないと言うべきであろうか．

また，ブラリ・フォルティの逆理に関しては，アダマールは，すべての順序数の**集合** W の**存在**が諸悪の根源であるとする．よって，彼は今日からみて正しい観点“W は**集合としては**存在**しない**”と考えていたようにみえる．まだこのように言い切ってはいなかったが，そう考えていたと推測できる．ツェルメロはこのような言葉に触発されて“クラス”の概念を得たのであろうか．

さて，再び数学の対象の問題に返ろう．ボレルが言うように“有限個の言葉で定義可能な”対象のみを考えるべきだとすれば，可算集合しか考えることができないことになってしまう，とアダマールは主張する．だから，彼はそのように限定することに賛成しないと考えている，と言ってよいであろう．上記の“有限個の言葉で定義可能”をアダマールやボレルたちがどのように把握したか筆者には推定できない．現在の形式的公理論で考えるならば，“集合論言語で記述できる対象”の意味**にも**とれるが，この場合は“可算個の”集合しか考えることができないということになるであろう．このあたりの事情は，少し**スコーレムの逆理**（たとえば［15; p.163］）に似ているところもある．スコーレムの逆理は“モデルの中で可算とは何か”という問題であるが，上述の議論では“集合論言語の論理式が可算個しかない”という事実に基づいている[1/]．

おしまいに，第5番めの手紙——ボレルからアダマールへの手紙——をみよう．ここでもまだボレルは選択公理にまつわる正当性を問題にしている．ツェルメロは選択公理から整列定理が導かれることに重点をおいて，選択公理の正当性は軽く考えていたようにも思える．この原理は数学で無意識的によく使われているではないかと．ボレル等はそこにかみついて，この五つめの手紙ではルベーグの講演を引用し，ツェルメロはいつも識別された要素の同じ選択を行なっているが一体どのようにしてそれは保証されるのだろうか，と言う．ボレ

1/　我々は「非可算集合が存在する」という命題を集合論公理から証明することができる．しかし，このことは「A の非可算個の各要素を定義できる」ことを意味してはいない．

ル等が疑うのも無理はない．今日，そんなことはできないことがわかっているのだから．

現在の集合論公理系がカントルの意図した集合論とマッチするものかどうかは，議論の余地があるであろう．しかし，これ以上よい公理系——少なくとも選択公理や連続体仮説（あるいはその否定）などが証明できるような，しかも万人が納得するような公理系——があるとも思えない現状では，現公理論の立場からは，選択公理の正当性を問題にしたボレル等の論争は不毛であり，ある意味で見当違いであったともいえよう．もちろん，このことは論争の意義を否定するものではない．公理的集合論は集合そのものについてはなにも言っていないし，直観的な素朴集合論も依然として存在しうると考えられる．また，この論争が契機となってエフェクティヴィティの概念が生まれ，いわゆるフランス半経験主義が固まったと考えることもできるであろう．このへんの事情は筆者の力の及ぶところではないので，ここらで退散することにしよう．

追記．アダマールの二つの手紙は，**一意化**（uniformization，**単層化**ともいう）の問題の起源となった議論を含んでおり，後の記述集合論にきわめて大きなインパクトを与えたのである．一意化については文献［14］を参照されたい．（補遺 III を参照）

アダマールが言う命題 B（p.64）を補遺 III の見地で見てみよう．集合 $E\subseteq\mathscr{R}^2$ を

$$\langle x, y\rangle \in E \iff y \text{ は代数的数でなく，しかも } y \text{ はどんな 1 変数整数係数多項式の } x \text{ における値でもない}$$

によって定義すると，$\forall x\exists y(\langle x, y\rangle\in E)$ が成り立つ．このとき p.228 の意味で，或る集合 $U\subseteq\mathscr{R}^2$ が E を一意化するならば，

$$y=f(x)\iff\langle x, y\rangle\in U$$

によって定義された関数 $f(x)$ は命題 B で存在が主張された関数となる．アダマールがどのようにしてかかる $f(x)$ を作ったかはわからないが，選択公理を使えばかかる集合 U の存在は明らかである．具体的には，E はボレル集合なので，近藤の一意化定理により，かかる U として或る補解析集合をとることができる．

第3章　選択公理と数学

本章では，序章で列挙した数学の諸定理を，選択公理がそれらのどこに関係するかを中心に解説する．証明，あるいは証明の概略を述べるものも多い．

§13　解析学に現れる選択公理

選択公理は，序章でも触れたように，思わぬところで必要になることがしばしばあり，うっかりすると見のがしてしまうこともある．数学の巨匠と呼んでよいある人物でさえ，自分の議論の中で選択公理を暗々俚に使っていることに気づかなかったほどである．しかも，それが選択公理について論争中であったにもかかわらずである．ことほど左様に選択公理は無意識的に使われるもので，かなり自然なものである——と一見考えたいところである．しかし実は左に非ず，選択公理を仮定すると逆理と思われる命題さえ証明されてしまう．もっとも，前者は可算選択公理についてであり，後者は非可算個の集合からの選択という相異があるので，少し感じ方が違うという事情はあったであろうが．

連続関数

定義 13.1 実関数 $f(x)$ がその定義区間 I の一点 a で連続であるとは，

(1)　　$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in I\,[\,|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon\,]$

が成り立つことである．ただし，ε, δ, x は実変数である．

これはよく知られた定義であるが，このようないわゆる ε-δ 式定義は関数論

でおなじみのコーシーが初めて与えたもので，“限りなく近づく”という曖昧な表現を論理的に正確に記述している．コーシーが（フランスの）学士院でこれを発表したとき，それを聞いていた長老の某教授は急ぎ家に帰って，自分の仕事に現れた収束性や連続性に関する部分を逐一チェックし誤りのないことを確かめた，という逸話が残っている．

それはさておき，この連続性について今日ハイネの定理とよばれているものがある:

定理 13.2　実関数 $f(x)$ がその定義区間 I の一点 a で連続であるための必要十分条件は，

$$(2)\qquad \begin{cases} I \text{ において } a \text{ に収束する\textbf{すべての}数列 } \{a_n\} \text{ に対し} \\ \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \end{cases}$$

が成り立つことである．

実はこの定理はハイネ自身の結果ではないらしく，彼もこれはカントルに負うものであると記しているが，(2) は連続関数に関するハイネの条件と誤称されている．ところで，(1) から (2) が導かれることは明らかである．問題はその逆である．(2) を仮定しよう．(1) が成立しないとすれば，

* (the asterisk is in the left margin beside this line)

$$(3)\qquad \forall\delta>0\,\exists x\in I\,[\,|x-a|<\delta \wedge |f(x)-f(a)|\geq\varepsilon\,]$$

となる正数 ε が存在する．$\delta=1/n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ としてみると，(3) により各 n について集合 A_n

$$A_n=\left\{x\in I \;\middle|\; |x-a|<\frac{1}{n} \wedge |f(x)-f(a)|\geq\varepsilon\right\}$$

は空でない．よって

\# (4)　　“各 A_n から一点 a_n を選ぶことができる”

これらの a_n に対し

$$(5)\qquad |a_n-a|<\frac{1}{n} \wedge |f(a_n)-f(a)|\geq\varepsilon.$$

したがって $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ であるのに $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\neq f(a)$．これは (2) に反する．

ゆえに，(1) が成立しなければならない．□

問題点は (4) にある．(4) のような述べ方をしていると，なにも選択公理など必要ないではないか，各 A_n から一点 a_n を選ぶなどということはごく自然なことで公理に訴えるまでもないことである，と考えても不思議ではないであろう．しかし，そうではない．$a_1, a_2, a_3, \cdots$ と選出していってこの行為が無限に続く．そのとき，

(6)　$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

が一つの集合として確かなものでなければならない．そうでなければ，$\lim_{n\to\infty} a_n$ のような極限操作を考えることが困難になるであろう．集合として曖昧な数列 (6) について，それが a に近づくなどということは，できない相談である．選択公理は (5) をみたす数列 (6) が一つの集合としてたしかに存在しますよと保証してくれる，そこにこの公理のありがたみがあるのである．実際，選択公理なしに，$a_n \in A_n$ なる (6) を，集合論の言葉で記述しようと試みても，一般にはうまくいかないことがわかる．(補遺 I を参照)

上述の証明は，ハイネがカントルから借用したと言って書いた証明と，本質的に同じものである．しかし，カントルにしてもハイネにしても，この証明がなんらかの新しい要請を必要とするものであるというたぐいの注意をなにも記していなかった．定理 13.2 の証明に (可算)選択公理が必要であると指摘されたのは，ツェルメロの論文発表後 10 年を経てからのことであった．イタリア人チポラが最初に選択公理の必要性を唱え (1913 年)，後シールピンスキーが可算選択公理が必要であると述べた (1918 年)．

ルベーグ測度

実数空間 (あるいは実数直線) $\mathscr{R}$ あるいは $\mathscr{R}^n$ については既知とする．ルベーグは，ジョルダン測度やボレル測度の不満足さを解消するものとして，今日ルベーグ測度と呼ばれる測度を発見した．それは 1902 年のことで，ルベーグは彼の学位論文 [43] でこれを公表したのである．彼はまず，次の問題——測度問題と呼ばれる——を提起した：

測度問題（Measure Problem）　$\mathscr{R}^n$ の**すべての**有界部分集合 A に対し定義された非負実数値関数 $\mu(A)$ で，条件

（i）　$\mu(A)>0$ となる集合 A がある，

（ii）　A, B が合同（すなわち，2点間の距離を変えない変換で一方を他方に移せる）ならば，$\mu(A)=\mu(B)$ である，

（iii）　$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ が互いに素な高々可算個の集合ならば，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

をみたすようなものが存在するか？

上記第3条件のゆえに，このような μ は**完全加法的測度**とよばれる．ルベーグはこの問題を解こうとして，いわゆるルベーグ測度と名づけられた測度を定義した．それは先発のジョルダン測度とボレル測度を包含する画期的なものであったが，測度問題自体を解くには至らなかった．実は，今日広く認められている集合論の公理系 ZF においては，測度問題は肯定することも否定することもできないことがわかっている[1]．

ルベーグは測度問題には成功しなかったものの，彼が新しく定義した測度は大成功であった．現在の数学研究において，$\mathscr{R}^n$ の測度として用いられるのはほとんどすべてルベーグ測度であると言っても過言ではないであろう．

ところが，選択公理提案後10年ほどたったころある問題提起がなされた．それはシールピンスキーによる研究である（1916年）．シールピンスキーはその論文［48］の中で，ベール（不連続関数を研究しベール関数の階層を構成した）やルベーグの研究が可算選択公理に依存していることを指摘し，続く論文［49］において選択公理のいろいろな役割について詳述した．シールピンスキーはル

1/　バナッハ－クラトウスキー［24］は，「ZFC＋CH ではこのような μ が存在しない」ことを証明した．ここに CH とは，連続体仮説 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ のこと．ゲーデル［31］によって，ZF の無矛盾性を仮定すれば——この仮定はだれもが抱いている願望である——ZFC＋CH も無矛盾であるから，μ の非存在も無矛盾となる．よって，**ZF で測度問題を証明することはできない**．さらに付録§28 で触れるソロベイの結果により，**ZF で測度問題を否定することはできない**．そういうわけで，測度問題は ZF では決定不能な問題であったわけである．

ベーグ測度の理論において，ルベーグ測度 m の**可算加法性**（完全加法性）が最も重要であるのに，これを証明するにあたり可算選択公理が必要になると主張したのである．ご承知のように，可算加法性とは，上記（iii）に対応するもので，

（7）
$E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ が互いに素なルベーグ可測集合の可算列であれば，その和集合 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ もルベーグ可測で，

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

が成り立つ．

という性質である．この性質をもつことがルベーグの理論において最も基本的であることは論をまたない．現在の標準的理論展開に従って，このあたりの事情を調べてみよう．

添字つきの I_ν は $[a, b)$ なる形の区間（半開区間とよぶ）を表し，$|I_\nu|$ はその長さ $b-a$ を表すとする．集合 $E \subseteq \mathscr{R}$ の外測度 $m^*(E)$ は

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

として定義される．このとき，$0 \leq m^*(E) \leq \infty$，$m^*(\phi) = 0$，$E_1 \subseteq E_2 \Longrightarrow m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$，$m^*([a, b)) = b-a$ などの性質が容易に導かれる．特に重要なのは m^* の劣可算加法性である：

（8）
高々可算個の集合 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ が与えられるとき，

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

が成り立つ．

ご承知のように，上で問題にされた m の可算加法性（7）は，この（8）を利用して証明される．

* **（8）の証明**　$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ とおく．ε を任意に与えられた正数とする．各 E_n に対し $m^*(E_n)$ の定義から，

$$E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{nk}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |I_{nk}| < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{9}$$

が成り立つような半開区間の列

♯ (10)　　$$I_{n1},\ I_{n2},\ \cdots,\ I_{nk},\ \cdots$$

を**選ぶ**．これらの全体 $\{I_{nk} \mid n=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots\}$ は可算集合であるから，これを改めて $\{I_p \mid p=1,2,\cdots\}$ と並べ直すと，$E \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty} I_p$ である．そのとき，$m^*(E)$ の定義と (9) とから（ちょっとした計算によって）

$$m^*(E) \leq \sum_{p=1}^{\infty} |I_p| < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon$$

が得られる．ε は任意の正数であったから，この不等式は $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$

⁑ を与える．□

このような方式で書かれたほとんどの教科書は，上の証明で選択公理が使われたことに触れていない．各 n に対し (9) をみたす区間列 (10) を選出するためには，**可算選択公理が必要**である．ルベーグ自身の議論の進め方は上の論法とは異なるが，やはり各 n に対しある種の区間列の選出を行なっているので，その際に可算選択公理が必要となるのである．

ところで，シールピンスキーはこの件に関し，選択公理に批判的なフランスの数学者がどのように反応するかを問うた．しかし，彼らはこの挑戦を無視してしまった．強い調子で選択公理を批判したあの五つの手紙がすでに公表されている手前，さらにまたルベーグは論争が始まっているにもかかわらず1905年の「解析的に表示可能な関数」についての論文 [44] で未だ気づかずに選択公理を使ってしまった手前，たいへん具合が悪かったに相違ないところである．うっかり使っていたなどと，いまさら言えなかったのであろう．

非可測集合の存在

ルベーグは前項で引用した論文 [43] で次のような意味のことを述べている："測度問題は，可測集合とよぶ集合についてしか解けていない．この問題が，内測度と外測度が一致しないような集合（もしそのような集合が存在すればであるが）に対して不可能であるかはまだ証明されていない．"

内測度と外測度が一致しない集合は（ルベーグの意味で）非可測集合と呼ば

れるものである．ツェルメロの論文が出るや間もなく，イタリアから反応があった．ヴィタリである．彼はツェルメロの選択公理を用いて非可測集合の存在を証明した［66］．この証明はルベーグ測度について書いてある本の多くのものに載っているが，事のついでにここでも紹介しておこう．

* Q を有理数全体の集合とする．実数 ξ, η に対し

$$\xi \equiv \eta \iff \xi - \eta \in Q$$

によって $\mathscr{R}$ 上の関係 $\equiv$ を定義すると，$\equiv$ は同値関係となる．ξ の同値類を，ヴィタリにちなんで $V(\xi)$ で表す．したがって，任意の $\xi, \eta \in \mathscr{R}$ に対し

$$V(\xi) = V(\eta) \ \vee \ V(\xi) \cap V(\eta) = \phi.$$

♯ **選択公理によって**，集合族 $\mathscr{R}/\equiv = \{V(\xi) \mid \xi \in \mathscr{R}\}$ の選択集合 C を作る．すなわち，C は異なる $V(\xi)$ から実数を1個ずつ代表要素として選んで集めた集合である．各 $\xi \in C$ に対し適当な有理数 r をとれば，$0 \leq \xi + r < 1/2$ となるようにでき，このように変換された代表要素 $\xi + r$ は互いに異なる．このような代表要素全体の集合を V とすれば，$V \subseteq [0, 1/2)$．このとき V は非可測である．

以下，その証明．仮りに V が可測としよう．$V_0 = V$，各正整数 k に対し $V_k = \{\eta + 1/(k+1) \mid \eta \in V\}$ とおくと，任意の異なる自然数 k, n に対し V_k と V_n は合同である．したがって $m(V_k) = m(V_n)$ であり，しかも $V_k \cap V_n = \phi$．

$$\therefore \quad m\left(\bigcup_{n=0}^{k} V_n\right) = \sum_{n=0}^{k} m(V_n) = (k+1)m(V).$$

$\bigcup_{n=0}^{k} V_n \subseteq [0, 1]$ なるゆえ，$(k+1)m(V) \leq 1$．k は任意の正整数でよいから，$m(V) = 0$ でなければならない．

一方，各 $r \in Q$ に対し $V^{(r)} = \{\eta + r \mid \eta \in V\}$ とおくと，$V^{(r)}$ は V と合同となるから $m(V^{(r)}) = m(V) = 0$．さらに，

$$\bigcup_{r \in Q} V^{(r)} = \mathscr{R}, \qquad r \neq s \Longrightarrow V^{(r)} \cap V^{(s)} = \phi$$

である．Q は可算集合であるから

$$m(\mathscr{R}) = m\left(\bigcup_{r \in Q} V^{(r)}\right) = \sum_{r \in Q} m(V^{(r)}) = 0$$

** となって，不合理．ゆえに，V は可測でない．□

前項で，シールピンスキーがルベーグ等に可算選択公理の使用に対する見解を求めたことを述べた．ルベーグはこれを無視したが，シールピンスキーの非可測関数の存在に関する議論には反発して，シールピンスキーは不注意に選択公理を使ったと噛みついた．しかし，これはルベーグの誤解であった．第一級の数学者でも誤解はあるので，我々凡人も救われる．しかし，誤解が次の大発展のカギとなることもある．

（実は，ルベーグは前項で引用したもう一つの論文［44］で，今日では有名になっているある誤解をした．約10年後，ロシアの若い学生ススリンはルベーグの誤りに気づき，それを修正することによって新しい集合――解析集合――を発見したのである．これは現在大きく発展した記述集合論の出発点となった発見で，誤解の効用を示す好例である．記述集合論は，実数の定義可能な集合を記述的に研究する学問で，なかなか面白い理論である．筆者はこの理論に多大な関心をもっているが，このような“定義可能な”集合を研究する上でも実は選択公理がないことには実り豊かな結果を得ることができないので，この公理の重要性を身をもって感じている次第である.）

記述集合論で使われる選択公理は主として従属選択公理（p. 81）というやや弱い形の公理であるが，非可測集合の存在証明に使用されたのはより強い形のもので，上記証明では“$\mathscr{R}$ の部分集合たちに対する選択集合の存在”という形であった．実はもう少し弱い形の公理で十分であることが知られているけれども，後者でさえ，前項で使われた可算選択公理や，$\mathscr{R}$ 上の関係に関する従属選択公理よりも強い公理である．このことは，序章の（I）で述べた注意書を物語るものである．

§14　集合論に現れる選択公理

まず，本書の初めに述べた「無限集合は可算部分集合を含む」について説明しよう（この命題は第1章§5で，定理5.1（可算部分集合定理）として再述し

た)．あのとき述べた証明で問題となる点は，もちろん，次々に $a_0, a_1, a_2, \cdots$ と選んでいく操作を無限に続けるという点にある．「無限集合 M から一要素 a を取り出す」ということも問題ではあるが[1/] それはさておいて，この操作を有限回たとえば n 回だけ繰り返して集合 $F=\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$ を作るのであれば，これは選択公理を必要としない．すなわち，集合 F の存在は選択公理なしに証明できる．

このように，ある証明で何を使ったかを明確にしなければならないような場合，素朴な集合論では正確を期し難い．本書ではこのような場合，いつもツェルメロ－フレンケルの集合論公理系 ZF（場合によっては選択公理を含めた公理系 ZFC）を念頭において論じている．したがって，上述の集合 M の n-要素部分集合 F の存在は ZF で証明できる，ということである．

さて，可算部分集合定理を証明する前に，もう一度選択公理を掲げよう．選択公理にはいくつかの同値な形があるので，序章で述べたものを（AC 1）と名づける．再記すると，

（AC 1）　すべての集合 T は選択関数をもつ．すなわち，

$$\varphi: T-\{\phi\} \longrightarrow \bigcup T, \qquad E \in T-\{\phi\} \Longrightarrow \varphi(T) \in E$$

なる φ が存在する．

ここで，“すべての集合は”となっているが，それで差支えはないのである．それは，$T-\{\phi\}$ が空集合であっても，$\varphi=\phi$ がその選択関数となるからである．また，“公理的集合論の立場”では**すべての対象は集合である**ということに注意されたい．自然数も実数も集合として把握するのである．

*　**定理 5.1 の証明**　M を無限集合とし，（AC 1）により，$\mathfrak{P}(M)$（M の部分集合全体の集合）の選択関数を φ とする．

1/　我々としては「無限集合 M に対し，要素 a がキチンと定義されしかもそれが M に属することが証明できる」ならばこの上ない．しかし，いつもこのようにはいかない．たとえば，M が空集合であると仮定すると矛盾が生ずるから空でないという場合，M の要素 a を取り出すといってもどのように取り出してよいかわからないことがあるわけである．しかし形式論理上は，$\exists x[x \in M]$ のもとでは M の要素 a を考えて議論してよい．

$$\begin{cases} a_0 = \varphi(M) \\ a_{n+1} = \varphi(M - \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}) \end{cases}$$

とする．これは**数学的帰納法による定義**になっていて，ZF において集合 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ が存在することを証明できる（たとえば［15; p. 75］）．明らかに，この集合は M の可算部分集合である．□ ⁑

いわゆる整列定理「すべての集合は整列される」も，上と同様な論法によって証明できる．数学的帰納法による定義は，最初の超限順序数 ω までの超限帰納法である．これを適当な順序数 ξ までの帰納法に拡張すればよい．ξ としては M の濃度 κ の次の濃度 κ^+ の始数を，すなわち濃度 κ^+ をもつ最初の順序数をとれば十分である．ツェルメロの証明では，ここのところがまだ明確になっていなかった．1904年の段階では，まだ彼の集合論公理系も生まれていなかったし，超限帰納法による定義で定義された集合の存在ということも未だキチンと証明されていなかった時代である．

さて，上の証明では“完全な”選択公理を使ったが，実はこの定理の証明には可算選択公理が必要とされるだけである．この公理はすでに第1章§5で述べてあるから再述しないが，これを（CAC）として引用することがある．

* **可算選択公理に基づく定理 5.1 の証明**　M を無限集合とする．各自然数 n に対し T_n は，M の異なる $n+1$ 個の要素 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ が作る $(n+1)$-要素列

（1）　　$$\langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$$

全体の集合とし，

$$T = \{T_n \mid n \in \omega\}$$

\# とする．T は可算集合であるから，T に（CAC）を適用して，T の選択関数 φ を得る：

$$\varphi(T_n) \in T_n \qquad (n \in \omega)$$

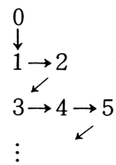
このとき，有限要素列を集合とみて，和集合

（2）　　$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi(T_n)$$

⁑ を作ると，明らかに A は可算集合で M に含まれるものである．□

ここで注意すべきことは，(2) によって集合 A を作ったとき，A が可算集合であることを主張する際，もはや (CAC) は使う必要がないということである．$\varphi(T_n)$ は (1) という形をしていて，すでに“番号づけられている”．だから，このようなものの“和集合”の要素には**具体的に**――もちろん選択関数 φ という神がかり的なものを利用しての上だが――番号をつけることができるのである：

$$\begin{aligned}\varphi(T_0) &= \langle a_0^{(0)} \rangle \\ \varphi(T_1) &= \langle a_0^{(1)}, a_1^{(1)} \rangle \\ \varphi(T_2) &= \langle a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)} \rangle \\ &\vdots\end{aligned}$$



ここで，もし同じ要素が現れたならば 2 回め以降その要素を除いて番号づける．

もし (1) の代わりに $(n+1)$-要素集合

(3)　$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

を考える場合は，選出した集合 $\varphi(T_0), \varphi(T_1), \varphi(T_2), \cdots$ の要素を並べるとき (3) における番号づけが指定されていないので，各 $\varphi(T_n)$ に対し**どんな番号づけを選ぶか**という段で再び可算選択公理を使わなければならない．あるいはそこのところは次々項で述べる定理（定理 5.3）に訴えてもよい．しかし，なるべくなら，選択公理を使う回数が少ないに越したことはないであろう．

デデキント無限とデデキント有限

すでに第 1 章 §5 において，有限・無限の定義およびデデキント無限・デデキント有限の定義を述べ，若干のコメントをつけ加えておいたから，ここで多くを再述するには及ばないであろう．

定理 14.1　集合 M がデデキント無限ならば，M は無限集合である．

なぜなら，もし M が有限集合ならば，M はけっして M の真部分集合と同等にならないから，デデキント無限でないことになり，不合理である．この証明には，選択公理はなんら係わりをもたない．しかし，逆はそうでない．

定理 14.2　集合 M が無限ならば，M はデデキント無限である．

*　　定理 5.1 から定理 5.2「無限集合はそのある真部分集合と同等である」が，
♯　直ちに導かれた．よって前項のことから，定理 14.2 が（CAC）のもとで証明
⁑　可能であることがわかる．

後でもう一度述べるが，定理 14.2 の成立には絶対に（CAC）が必要である．すなわち，「ZF でこの定理を証明することは不可能である」ことが証明されるのである．

可算集合の可算和

この項は，定理 5.3 すなわち可算和定理「可算集合の可算個の和集合はまた可算集合である」を証明するのが目的である．

*　　**定理 5.3 の証明**　各自然数 n に対し A_n は可算集合であるとする．よって，各 $n \in \omega$ に対し集合

（4）　$$T_n = \{f \mid f : \omega \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} A_n\}$$

♯　は空でない．よって，可算集合 $T = \{T_n \mid n \in \omega\}$ に（CAC）を適用して，T の選択関数 φ

$$\varphi(T_n) \in T_n \qquad (n \in \omega)$$

を得る．$f_n = \varphi(T_n)$ とおけば，各 n に対し

$$A_n = \{f_n(0), f_n(1), \cdots, f_n(k), \cdots\}$$

となっている．ここに得られた ω 上の2変数関数 $f(n, k) = f_n(k)$ と，カントルの対関数 $\pi(n, k)$ とを組み合わせることによって，和集合

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

のすべての要素にもれなく自然数の番号をつけることができる．ただし，異なる m, n に対し $A_m \cap A_n \neq \phi$ という場合があるので，同じ要素が異なる番号をもつという点を修正しなければならない．その処置は，次のように行なう：A_n の代わりに，

$$B_n = \{\langle f_n(k), n\rangle \mid k \in \omega\}$$

という対の集合 B_n を考える．このとき，明らかに

$$m \neq n \implies B_m \cap B_n = \phi$$

である．和集合

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$$

の要素 $\langle f_n(k), n\rangle$ に番号 $\pi(n, k)$ をつけることにより，B のすべての要素に自然数を 1 対 1 対応させることができる．ゆえに，B は可算集合である．

B の要素へのこの番号づけで，対の第 1 要素が異なるものを順に拾っていって，部分集合 B' を作る．A_n は無限集合としているので B' は無限集合．可算集合の無限部分集合は可算集合であるから，B' は可算集合である．明らかに，$A \sim B'$ である．ゆえに，A は可算集合である．□

可算部分集合定理（5.1）と可算和定理（5.3）は共に可算選択公理から導かれるが，それら 2 定理は互いに独立のようである．すなわち，

「ZF において，定理 5.1 から定理 5.3 を導くことはできないし，かつまた定理 5.3 から定理 5.1 を導くこともできない」

これは［6］によったものであるが，残念ながら筆者はこれを確認できなかった．

なお，選択公理と基数の諸性質との関係について夥（おびただ）しい結果がある．これを解説するには選択公理を使わないで基数理論がどのようにして合理的に展開されるものかを，前もって説明しておく必要があるであろう．よってこの話題は省くことにする．選択公理なしの基数理論については［15; § 4.6, 4.7（同書 p.126 の 19 行目の（1961）は（1955）と訂正)］を参照されたい．次の結果は，このようなやかましいことを言わなければ，素朴に証明できるであろう:

定理 14.3　命題

（5）　　　　すべての無限基数 $\mathfrak{m}$ に対し $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}$ である

から可算部分集合定理を導くことができる．

さて，集合論のごく最初の部分で，すでにかくのごとく選択公理に遭遇した．集合一般を取り扱うのはなかなか難しいのである．さらに集合論を進めようとすると，選択公理なしには動きがとれないことがわかる．たとえば可算順序数（＝第2級順序数）の理論にさえ，選択公理が——この場合は（CAC）で十分であるが——必要になる．カントルは集合論研究の最後の論文［3; (1897), p. 312−］において，第2級順序数の理論を詳細に展開しているが，その中で次の定理を証明している：

定理 14.4　$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \cdots$ が高々第2級の順序数からなる基本列ならば，これらのどれよりも大きい最小の順序数（$=\lim \alpha_\nu$）はまた第2級順序数である．

ここで，順序数の基本列とは

(6)　$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} < \cdots$$

なる順序数の無限列のことである．カントルがここで考えていたのは，もちろん“可算列”である．（より高いクラス（number class）を考えるときはもっと“長い列”を取り扱わなければならない．）$\lim \alpha_\nu$ は (6) の最小上界である．

*　証明はすでに定理 8.1 の証明の中に含まれている．すなわち，

$$\alpha = \bigcup_\nu \alpha_\nu$$

が順序数となるので，α が可算集合であることをいえばよい．ただし，ここで各順序数 α_ν を $\{\beta \mid \beta < \alpha_\nu\}$ なる集合と考えた．各 α_ν は高々可算集合であるから，第1章の定理 5.3（を有限集合があってもよい場合に拡張して）によって，α は可算集合であることがわかるというわけである．□

この定理の証明に（CAC）が必要であることを最初に指摘したのは，前述のシールピンスキー［49; p. 117］であると思う．

また，基数の理論を展開するにも選択公理が必要である．選択公理なしの集合論 ZF では，種々の困難があって，豊かな基数理論を期待することができない．そもそも ZF では基数の定義自身がやっかいである．現在ではいわゆる**スコットのトリック**（Dana Scott's Trick）とよばれる方法を使ってすっきり定

義できるのであるが，この trick が現れたのはようやく1955年のことである！（第4章§22） それ以前，選択公理を使わないで基数を定義するには種々苦心したようである．そして，そのどれもあまり満足なものではなかった．

§15　位相数学と選択公理

各種の位相空間の性質を論ずるには，選択公理は不可欠なものであろう．たとえば，ウリゾーンの補題とよばれる興味ある結果がある．

読者はすでに位相空間について学ばれたことと思う．近傍，開集合，閉集合，閉包などの諸概念は説明なしに使うことにする．

位相空間（開集合族が，したがって閉集合族が定義されている空間）T において，"その任意の異なる2点 x, y に対し，x の近傍 U，y の近傍 V で $x \notin V$，$y \notin U$ となるものがある" ならば，T は T_1 位相空間またはクラトウスキー空間といい，この条件を T_1 分離公理という．また，T において，"$F_1 \cap F_2 = \phi$ なる二つの閉集合 F_1, F_2 に対し，$F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$, $G_1 \cap G_2 = \phi$ なる開集合 G_1, G_2 がある" という条件を T_4 分離公理という．T_4 分離公理をみたす T_1 位相空間を，正規空間という．

定理 15.1（**ウリゾーンの補題**［53］） F_1, F_2 が正規空間 T の互いに素な（すなわち $F_1 \cap F_2 = \phi$ なる）閉集合ならば，

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in F_1 \text{ のとき}) \\ 1 & (x \in F_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なる T 上の実数値連続関数 f が存在する．

* **証明**　$A \subseteq T$ に対し，$T - A$ を A^c で表す．$F_2{}^c$ を $G(1)$ で表すと，$G(1)$ は F_1 を含む開集合である．T_4 分離公理によって，$F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$, $U \cap V = \phi$ なる開集合 U, V がある．このとき U の閉包 $\overline{U} \subseteq V^c \subseteq G(1)$．よって $G(0) = U$ とおけば，$\overline{G(0)} \subseteq G(1)$．

帰納法の仮定として，正整数 k に対し F_1 を含む開集合 $G(m/2^k)$（$m = 0$,

$1, 2, \cdots, 2^k$）が定義され

（1）$$m < n \Longrightarrow \overline{G(m/2^k)} \subseteq G(n/2^k)$$

が成り立っているとする．$\overline{G(m/2^k)}$ と $G((m+1)/2^k)^c$ は互いに素な閉集合であるから，T_4 分離公理によって（上の U のようにして）

（2）$$\overline{G(m/2^k)} \subseteq U_1, \qquad \overline{U_1} \subseteq G((m+1)/2^k)$$

なる開集合 U_1 が存在する．このとき $G((2m+1)/2^{k+1}) = U_1$ と定義する．この操作を $m = 0, 1, 2, \cdots, 2^k - 1$ に対して行なう．こうすれば

$$m < n < 2^{k+1} \Longrightarrow \overline{G(m/2^{k+1})} \subseteq G(n/2^{k+1})$$

が成り立つ．

以上により，すべての正整数 k と，$0 \leq m \leq 2^k$ なる m に対し開集合 $G(m/2^k)$ が定義され（1）が満足されることがわかった．ここから後の記述は本書の主題とは関係ないが，完結のため証明を続けよう．

$0 \leq t \leq 1$ なる実数 t に対し，集合 $G(t)$ を

$$G(t) = \bigcup \{ G(m/2^k) \mid m/2^k \leq t \}$$

によって定義する．開集合の任意個の和は開集合であるから，$G(t)$ は開集合である．このとき

$$0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \Longrightarrow \overline{G(t_1)} \subseteq G(t_2)$$

が成り立つことを容易に確かめることができる．$m/2^k$ なる形の有理数は区間 $[0, 1]$ において稠密であるから，

$$t_1 < r_1 < r_2 < t_2$$

なるあの形の二つの有理数 r_1, r_2 をとって $G(r_1), G(r_2)$ を補助に使えばよい．T 上の関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t \mid x \in G(t)\} & (x \in T - F_2 \text{ のとき}) \\ 1 & (x \in F_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義する．f が所要の条件をみたすことのチェックは読者にお委せする．一点 $a \in T$ での連続性は a を含む開集合 $G(f(a)+\varepsilon) - \overline{G(f(a)-\varepsilon)}$ を考えることによって導かれる．ただし ε は ε-δ 論法におけるあの小正数 ε である．□

上の証明で選択公理が必要になるのは，(2) なる開集合 U_1 を選ぶところである．このような U_1 は与えられた $G(m/2^k)$ と $G((m+1)/2^k)$ とから一般的な集合論的方法で定義することは困難なものであり，しかもそのような選択を無限回行なわなければならないので，選択公理にすがらざるをえないのである（実は従属選択公理で十分であることが知られている）．上の証明において，(AC 1) —— または他の形でも結構 —— をどのように適用すべきかは読者にお委せして，次に序章で述べた項目に移ろう．

閉包と点列

ご承知のように，位相空間 T において集合 A の閉包 $\bar{A}$ は近傍を用いて

(3)　$$x \in \bar{A} \iff \forall U(x)[U(x) \cap A \neq \phi]$$

により定義される．ただし，$U(x)$ は x の近傍を走るとする．ここで T は距離空間としよう．d を T の距離関数とする: $x, y, z \in T$ に対し，

1°)　$d(x, y)$ は非負実数で，$d(x, y) = 0 \iff x = y$,

2°)　$d(x, y) = d(y, x)$,

3°)　$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$　　（三角不等式）．

このとき，正数 ε に対し $U(x, \varepsilon) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ を x の ε-近傍という．

定理 15.2　距離空間 T において，x が A の閉包 $\bar{A}$ に属するための必要十分条件は

(4)　$\begin{cases} A \text{ に属する点列 } x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \text{ で } x \text{ に収束する } (\lim_{n\to\infty} x_n = x) \\ \text{ものが存在する} \end{cases}$

ことである．

*　**証明**　十分性: (4) が成立するとする．よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対し自然数 n があって

(5)　$$k > n \implies x_k \in V(x, \varepsilon).$$

(3) の右辺を導くために x の任意の近傍 $U(x)$ をとる．十分小さい正数 ε をとると $V(x, \varepsilon) \subseteq U(x)$ となるから，(5) により $U(x) \cap A \neq \phi$ である．

必要性：（3）が成り立つとする．各自然数 n に対し，x の $1/(n+1)$-近傍 $V(x, 1/(n+1))$ を考えると，（3）により

$$V(x, 1/(n+1)) \cap A \neq \phi.$$

\# したがって，各 n に対し $x_n \in V(x, 1/(n+1)) \cap A$ なる x_n を選ぶことができる．明らかに

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

* である．ゆえに，（4）が成り立つ．□　（補遺Iを参照）

選択公理が関係するところは # の部分で，可算選択公理によってあのような x_n を選出し集合（数列）$\{x_n \mid n \in \omega\}$ を形成することができるのである．

集合 A の集積点（極限点）の概念についても上記のものに対応する類似な二つの定義があって，同値性の証明にはやはり可算選択公理が必要になる．

位相空間 T において，x が集合 A の**集積点**であるとは

$$\forall U(x)[U(x) \cap (A - \{x\}) \neq \phi]$$

が成り立つことである．

定理 15.3　距離空間 T において，x が A の集積点であるための必要十分条件は

$$(6) \quad \begin{cases} A - \{x\} \text{ に属する点列 } x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \text{ で，} x \text{ に収束する} \\ \text{ものが存在する} \end{cases}$$

ことである．

\# 証明は前定理のそれとほとんど同様であるから省略する．この定理に選択公理が必要であることを最初に指摘したのは，前述のチポラである [28]．

コンパクト性についても，一般にはそれより弱い点列コンパクトという概念がある．位相空間 T が**コンパクト**であるとは，T を覆うどんな開被覆も有限部分被覆をもつことである．すなわち，

$$T \subseteq \bigcup \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

なる T の開集合族 $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ があれば，必ずそのある有限個の $G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \cdots, G_{\lambda_k}$ をもって T を覆うことができる：

$$T \subseteq G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup \cdots \cup G_{\lambda_k}.$$

（もちろん，上記二つの $\subseteq$ は $=$ と同じ意味である.） T が**点列コンパクト**とは，T の任意の点列 $\{x_n | n \in \omega\}$ が収束する部分列をもつこと，すなわち適当な部分列 $x_{n_0}, x_{n_1}, \cdots, x_{n_i}, \cdots$ に対し $\lim_{i \to \infty} x_{n_i} = a$ なる $a \in T$ が存在することである.

また位相空間 T において，その可算個の開集合の族 $\mathscr{B} = \{V_n \mid n \in \omega\}$ が

（7）　任意の開集合 G は $G = \bigcup\{V_n \mid V_n \subseteq G\}$ なる形に表すことができる

をみたすならば，$\mathscr{B}$ は T の**可算（開）基**であるといい，T が可算基をもつとき，T は**第2可算公理**をみたすということがある．このとき，

定理 15.4　第2可算公理をみたす距離空間 T では，コンパクト性と点列コンパクト性とは同値である.

*　**証明**　(i)　T がコンパクトであるとする．もし T が点列コンパクトでないとすると，T の可算点列

（8）　$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

があって，(8) は収束する部分列を含まない．そこで

$$F_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$$

を考えると，F_n は閉集合である．［なぜなら，任意に $y \in \overline{F_n}$ をとる．もし $y \notin F_n$ なら定義により，すべての正整数 k について

（9）　$$U(y, 1/k) \cap F_n \neq \phi$$

であるから，(9) に含まれる一点を選んで x_{i_k} とする．（このときは選択公理を必要としない．なぜなら，x_{i_k} として $x_{n+m} \in U(y, 1/k)$ なる**最小番号の** x_{n+m} をとって $i_k = n + m$ と定めればよいからである.）　$y \notin F_n$ だから，i_k が互いに異なるようにできる．よって，

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}, \cdots$$

は (8) の（異なる番号の）部分列で，明らかに y に収束する．これは仮定に反する．ゆえに $y \in F_n$，したがって $\overline{F_n} \subseteq F_n$.］　よって $F_n{}^c$ は開集合で，明らかに $T \subseteq \bigcup F_n{}^c$．$T$ はコンパクトだから，これの有限部分被覆がある．$F_n{}^c$ たちの単調性から，結局ある n に対して $T \subseteq F_n{}^c$ となる．これは不合理．ゆえ

に，T は点列コンパクトでなければならない．

（ii）T が点列コンパクトとする．T がコンパクトでないとすれば，T のある無限開被覆 $\mathscr{C}=\{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ で，そのどんな有限部分集合も T を被覆しないようなものがある．T は可算基 $\mathscr{B}=\{V_n \mid n\in\omega\}$ をもつから，各 G_λ に対する $V_n\subseteq G_\lambda$ なる V_n 全体を考えると，それはやはり可算個の開集合からなるので，それを改めて番号をつけ直して $\mathscr{G}'=\{U_n \mid n\in\omega\}$ とすれば，$\mathscr{G}'$ はやはり T の開被覆になっている：$T\subseteq\bigcup\{U_n \mid n\in\omega\}$．もちろん $\mathscr{G}'$ もその有限個の和集合では T を覆うことができない．よって，どんな $n\in\omega$ についても $T\nsubseteq U_0\cup U_1\cup\cdots\cup U_n$ であるから，可算選択公理によって，各 n に対し

（10）
$$x_n\notin U_0\cup U_1\cup\cdots\cup U_n$$

なる点 x_n を選び，集合（点列）$\{x_n \mid n\in\omega\}$ を形成する．点列コンパクト性により，それは収束する部分列を含むので，これを

$$x_{k_0},\ x_{k_1},\ x_{k_2},\ \cdots$$

とすれば

（11）
$$\lim_{n\to\infty}x_{k_n}=a$$

なる点 a が存在する．$T=\bigcup\{U_n \mid n\in\omega\}$ であるから，$a\in U_m$ なる番号 m がある．（11）によって，

（12）
$$\forall i\geq n[x_{k_i}\in U_m]$$

なる n がある．ところが，$k_i>m$ なる k_i をとると（10）によって

$$x_{k_i}\notin U_0\cup U_1\cup\cdots\cup U_m\cup\cdots\cup U_{k_i}\qquad\therefore\quad x_{k_i}\notin U_m$$

これは（12）と矛盾する．ゆえに，T はコンパクトでなければならない．□

ベールのカテゴリーとベールの性質

位相空間 T の部分集合 N が**疎**（nowhere dense）であるとは，$\overline{N}$ が内点を含まないこと（すなわち，空でない開集合を部分集合として含まないこと）である．それは，空でない任意の開集合 G に対し必ず $G-N$ が空でない開集合を含むことと同値である．［その証明：N が疎なら，空でない開集合 G をとると，$G-\overline{N}\neq\phi$．（なぜなら，もし $G-\overline{N}=\phi$ なら $\overline{N}\supseteq G$ となるので N が

疎であるという仮定に反するからである.) $G-N \supseteq G-\overline{N}$ であるから, $G-N$ は空でない開集合 $G-\overline{N}$ を含む. 逆に N が疎でないなら, $\overline{N} \supseteq G \neq \phi$ なる開集合がある. 任意に空でない開集合 $G_1 \subseteq G$ をとると $\overline{N} \supseteq G_1$ となるから, 閉包の定義によって $N \cap G_1 \neq \phi$. ゆえに, G は $G-N$ が空でない開集合を含まないような開集合である.]

集合 A が可算個の疎集合 $N_0, N_1, N_2, \cdots, N_n, \cdots$ (同じものがあってもよい) の和集合であるとき, A は**(ベールの)第1類**集合であるまたは**やせ(瘦)**集合 (meager set) であるという. ついでに, そうでないとき, A は**(ベールの)第2類**集合とよぶことがある. また, A の補集合 ($A^c = T - A$) がやせ集合のとき, A は co-meager であるという. たとえば, 1-要素集合は疎であるから, 可算集合は第1類である.

さて, このとき大切なのは次の定理である:

定理 15.5　実数空間 $\mathscr{R}$ において, 全空間 $\mathscr{R}$ は第2類である.

第1, 2類の概念とこの定理はベールが発見したもので [21], 完備距離空間の場合へ拡張されたこの定理は, 今日ベールのカテゴリー定理とよばれている. それは, たとえば次のように述べられる:

定理 15.5′ (ベールのカテゴリー定理)　完備距離空間 T において, A が第1類集合ならば, A の補集合は稠密である, すなわち $\overline{A^c} = T$ である.

* **証明**　用語の説明を省くために, $T = \mathscr{R}$ として証明する. 記述はほとんど変わらない. さて,

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n, \qquad N_n \text{は疎集合}$$

とする. 任意の開区間 (a, b) に対し $(a, b) - A \neq \phi$ がいえるならば, $\overline{A^c} = \mathscr{R}$ である.

そこで, 端点が有理数の**閉**区間を考える. これらはちょうど可算個あるから, 番号づけて

$$J_n = [a_n, b_n], \qquad n \in \omega$$

としておく．

任意の開区間 (a, b) をとり，これを G_0 とおく．N_0 は疎集合であるから

$$J_k \subseteq G_0 - N_0, \qquad |J_k| < 1$$

となる区間 J_k が存在する．ただし，$|J|$ は区間 J の長さを表す．このような J_k のうち最小番号のものを J_{k_0} とし，$G_1 =$ 開区間 (a_{k_0}, b_{k_0}) とおく．次に，N_1 は疎であるから

$$J_k \subseteq G_1 - N_1, \qquad |J_k| < \frac{1}{2}$$

なる J_k があり，このような最小番号の J_k を J_{k_1} とし，$G_2 = (a_{k_1}, b_{k_1})$ とおく．以下同様にして，数学的帰納法によって次のような開区間の列 $\{G_n \mid n \in \omega\}$ が得られる：

$$G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq \cdots$$

$$\overline{G}_{n+1} \subseteq G_n - N_n, \qquad 0 < |G_{n+1}| < \frac{1}{n+1}.$$

区間縮小法により $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n$ はちょうど一点からなるので，それを p とすると

$$p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} (G_n - N_n) \subseteq G_0 \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} N_n^c = G_0 - A,$$

⁑ すなわち，$G_0 - A \neq \phi$．□

* **定理 15.5 の証明**　もし $\mathscr{R}$ が第1類ならば，$\mathscr{R}$ の補集合 $= \phi$ が稠密となって，不合理．□ ⁑

上の証明では，区間を選択していく際にそれぞれ明確に J_k を指定することができるので，選択公理を**必要としない**．ベール自身は，定理 15.5 を証明するにあたって，気づかずに可算選択公理を使っていたようである．（補遺 IV を参照）　しかし，ベールが証明した別の定理

定理 15.6　$\mathscr{R}$ において，第1類集合の可算個の和集合は再び第1類集合である．

においては，可算選択公理を避けることができないのである．そのことを最初

に指摘したのは，やはりシールピンスキーあたりではなかろうか．

*　この定理の証明自体は簡単なものである．すなわち，各 $n \in \omega$ に対し A_n が第1類集合であるとすれば

♯　(13)
$$A_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_{n,i}, \qquad N_{n,i} \text{ は疎集合}$$

という形に表されるから，その和集合 A は

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} N_{n,i}$$

⁑ となり，やはり A は疎集合の可算個の和である．ゆえに A は第1類である．□

選択公理が必要となるのは，各 n に対し (13) なる疎集合を選び出さなければならないところにあることは明らかであろう．

ベールはこの論文（それは彼の学位論文であった）で，関連するもう一つの重要な概念を案出していた．それはベールの性質とよばれるものである．集合 A とある開集合 G との**対称差** $A \oplus G = (A-G) \cup (G-A)$ が第1類集合ならば，A は**ベールの性質**をもつという（これはベールのアイデアをくんで後の人が定式化し命名したものである）．たとえば A が開集合または閉集合ならば，A はベールの性質をもつ．これは自明であろう．もう少し複雑な例は一般のボレル集合である．簡単のため，実数空間 $\mathscr{R}$ で考えよう．

定義　$\mathscr{R}$ において，開区間を含み，可算和演算と補演算（補集合をとる演算）のもとで閉じた最小の集合族を $\mathscr{B}$ で表す．$\mathscr{B}$ に属する集合を**ボレル集合**という．

ボレル集合は，ルベーグ以前に（と言っても直前のことであるが）ボレルが測度理論を確立しようとして導入した概念である．上の定義から，開集合，閉集合，あるいは可算個の開集合の共通部分（G_δ 集合という）等々はボレル集合であることがわかる．しかし，その全貌はすぐわかるというわけではない．

順序数 α はそれが 2β という形に表せるならば，**偶順序数**という．たとえば 0，極限数，(極限数)$+2\beta$ は**偶**である．そうでないものを**奇順序数**という．

1, 3, $\omega+1$ は**奇**である．

1°）　$\mathscr{B}_0$ は $\mathscr{R}$ の開集合全体の族，

2°）　$\mathscr{B}_1$ は $\mathscr{R}$ の閉集合全体の族（$=\mathscr{B}_0$ に属する集合の補集合全体の族）

3°）　$\mathscr{B}_\alpha$（α: 偶順序数）は，$\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{B}_\beta$ に属する可算個の集合の共通部分として表される集合全体の族，

4°）　$\mathscr{B}_\alpha$（α: 奇順序数）は，$\bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{B}_\beta$ に属する可算個の集合の和として表される集合全体の族，

とする．このとき，次の定理が成り立つ:

定理 15.7　（i）　$\mathscr{B}=\bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathscr{B}_\alpha$．ここに ω_1 は，非可算な最初の順序数である（第2章の定義 8.3 参照）．

（ii）　各 $\alpha<\omega_1$ に対し

$$\begin{matrix}\mathscr{B}_{2\alpha} \\ \mathscr{B}_{2\alpha+1}\end{matrix} \subsetneqq \begin{matrix}\mathscr{B}_{2\alpha+2} \\ \mathscr{B}_{2\alpha+3}\end{matrix}, \qquad \begin{matrix}\mathscr{B}_{2\alpha}-\mathscr{B}_{2\alpha+1}\neq\phi \\ \mathscr{B}_{2\alpha+1}-\mathscr{B}_{2\alpha}\neq\phi\end{matrix}$$

が成り立つ．**（ボレル集合の階層定理）**

この定理の証明はかなり面倒であるから，本書では省く．たとえば［42］を参照されたい．証明には**可算選択公理が必要**になることを注意しておこう．

上記（ii）が成り立つので，集合族の族 $\{\mathscr{B}_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$ はいわゆる**階層**（hierarchy）をなす．これを**ボレル階層**という．　注：p.239 の 2) を参照．

さて，ベールの性質にもどろう．先にあげたもの以外でベールの性質をもつ集合として，このボレル集合がある．すなわち，

定理 15.8　$\mathscr{R}$ のボレル集合はベールの性質をもつ．

この定理の証明は $\mathscr{B}$ の最小性に基づいてなされるが，その際，ベールの性質が補演算のもとで閉じていることの他に，「ベールの性質をもつ可算個の集合の和集合はまたベールの性質をもつ」という結果を利用しなければならない．
\# この結果はやはり可算選択公理に基づいて証明されるものであるから，結局，定理 15.8 も可算選択公理のもとで成立する定理ということになる．

また，ベールの性質は可測性とよく似ているところがあるので，解析学における可測性の位相数学的対応物であると考えられている．ところで§13で非可測集合の存在が問われたが，それではベールの性質についてはどうかということが問題となる．

定理 15.9　$\mathscr{R}$ においてベールの性質をもたない集合が存在する．

これを証明するために，一つの補助定理を証明しよう．以下この項では“$\mathscr{R}$ において”を省略する．

補題　集合 A がベールの性質をもち，A が第1類でないならば，ある空でない開集合 G において A は co-meager である，すなわち $G-A$ は第1類である．

証明　仮定により，$A \oplus G$ が第1類である開集合 G がある．A は第1類でないから $G \neq \phi$．$G-A \subseteq A \oplus G$ であるから，$G-A$ は（第1類集合の部分集合として）第1類である．□

この補題は，ベールの性質をもつ集合を取り扱うとき，しばしば利用される基本的な補題である．

定理 15.9 の証明　§13の非可測集合の存在証明で選択公理を使って定義した集合 C をとる．有理数全体 Q は可算集合であるから，これを番号づけて

$$Q = \{r_0, r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$$

とする．ただし，便宜上 $r_0=0$ としておく．

$$C_n = \{\xi + r_n \mid \xi \in C\}$$

と定義すれば，$C_0 = C$ で，

$$\mathscr{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \tag{14}$$

である．しかも，C は差が0でない有理数である2実数を同時に含むことはないから，C_n は互いに素である：

$$m \neq n \Longrightarrow C_m \frown C_n = \phi.$$

ベールのカテゴリー定理と (14) および定理 15.6 とによって，少なくとも一つの C_n は第 1 類でない．C_n は $C=C_0$ を平行移動したものであるから，C 自身第 1 類でない．これを利用して:

C はベールの性質をもたない．

なぜなら，もし C がベールの性質をもてば，補題によりある開区間 (a,b) があって，$(a,b)-C$ が第 1 類集合となるようにできる．明らかに，

(15)　　$a<r<s<b \Longrightarrow (r,s)-C$ は第 1 類である

が成り立つ．そこで，$a<c<d<b$ なる 2 数 c,d を考えて，$0<r_k<c-a$ なる有理数 r_k をとる．$C \cap C_k=\phi$ であるから

$$C_k \cap (c,d) \subseteq (c,d)-C$$

となり，(15) により $C_k \cap (c,d)$ は第 1 類集合となる．この集合を左へ r_k だけ平行移動すれば，集合

(16)　　$$C \cap (c-r_k, d-r_k)$$

が得られる．よって，(16) は第 1 類である．一方 (15) により $(c-r_k, d-r_k)-C$ も第 1 類集合となるから，この 2 集合の和集合 $(c-r_k, d-r_k)$ は第 1 類集合となる．ところが，ベールのカテゴリー定理の証明は $\mathscr{R}$ の代わりに区間を考えてもそのまま成立するので，区間は第 2 類である．ゆえに，不合理に到達した．したがって，C はベールの性質をもたない．□

先ほど，ルベーグ可測性とベールの性質は似ていると述べた．ボレル集合は両方の性質をもっている．しかし，ルベーグ可測であるがベールの性質をもたない集合の存在が，測度 0 の非可算な集合を考えることによって，可算選択公理から導かれる．また，ベールの性質をもつがルベーグ可測でない集合の存在は，さらに連続体仮説を仮定すると証明することができる．(これらについては [42] を参照されたい.) こういうわけで，似ているとは言うものの，両者は異なった概念であり相違点があるわけである．

§16　位相数学と極大原理

コンパクト空間の積空間

前述のウリゾーンや彼の同僚アレクサンドロフは，記述集合論創始者の一人ルージンの学生で，これらの人たちは集合論のモスクワ学派を形成していた．アレクサンドロフは20歳のとき「$\mathscr{R}$ における非可算なボレル集合は連続の濃度をもつ」という定理を証明して有名であった［20］．（この定理の証明にも**選**
択公理が必要である．なお，この定理はハウスドルフが同時に彼と独立に証明している［37］．）ここで，**連続の濃度**とは実数連続体 $\mathscr{R}$ の濃度のことで，

（1）
$$2^{\aleph_0}$$

と通常書かれる．これは自然数集合 ω の部分集合全体の濃度と等しい：

$$\overline{\overline{\mathscr{R}}} = \overline{\overline{\mathfrak{P}(\omega)}}$$

ので，（1）という記号が用いられたのである．集合 $\mathfrak{P}(\omega)$ を 2^{ω} とも書くからである．

カントルは「連続の濃度は可算集合の濃度 $\aleph_0$ のすぐ次に大きい濃度である」と予想した．すなわち，

（2）
$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

であろうと考え，その証明に苦心したが成功しなかった．（2）をカントルの**連続体仮説**（Continuum Hypothesis）という（第1章§4）．アレクサンドロフの定理は“ボレル集合だけを考えるならば連続体仮説が成り立っている”ことを意味するので，この意味で重要なものであった．（しかし，翌年やはりこれもルージンの学生であったススリンによって，いわゆる解析集合の場合に拡張されはしたが．）

さて，1920年代の中ごろにモスクワ学派に入ってきた人たちの中にチコノフがいた．チコノフはウリゾーンの補題の結論を少し弱めた条件（閉集合 F_1 の代わりに一点をとる）を考え，その条件をみたす位相空間（ここでは T_2 空間の意）を研究し［52］，この論文の中で，チコノフは今日非常に有名になって

いる一つの定理を証明した：

定理 16.1（チコノフの定理）　コンパクト空間の任意個の積空間は，再びコンパクト空間である．

添字集合 Λ の各要素 λ に対し位相空間 T_λ が定義されているとし，T_λ の開集合系を $\mathscr{O}_\lambda$ とする．このとき，直積集合

$$(3)\qquad T = \prod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda = \left\{ f \,\middle|\, f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda,\ \forall\lambda\in\Lambda[\,f(\lambda)\in T_\lambda\,] \right\}$$

に次のようにして位相を導入する：各 $\lambda\in\Lambda$ に対し

$$(4)\qquad \mathscr{S}_\lambda = \left\{ \prod_{\nu\in\Lambda} X_\nu \,\middle|\, X_\lambda\in\mathscr{O}_\lambda,\ \nu\neq\lambda \text{ なる } \nu \text{ に対し } X_\nu = T_\nu \right\}$$

とおく．T の部分集合の族

$$\mathscr{S} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{S}_\lambda$$

を（開集合の）**部分基**（**準基**ともいう）とする．したがって T の開集合は，$\mathscr{S}$ の有限個の集合の共通部分の和集合として表される集合である．この位相を**直積位相**という．

チコノフはすべての $\lambda\in\Lambda$ に対し $T_\lambda=[0,1]$ である場合にこの定理を証明したのであるが，後にチェコスロバキアの数学者チェックによって上記の形に一般化された．定理を証明するために，選択公理と同値な極大原理とよばれるいくつかの命題を準備する．

順序集合 $\langle E, <\rangle$ を考える．E の要素 u が部分集合 $S\subseteq E$ の**上界**とは，

$$(5)\qquad x\in S \Longrightarrow x\leq u$$ [1/]

が成り立つことである．u が**極大**（**元**）である（もし存在すれば）とは，

$$(6)\qquad x\in E \Longrightarrow u\nless x$$

なること，すなわち $u<x$ となる E の要素が存在しないことである．$S\subseteq E$ が**鎖**であるとは，$<$ が S 上で線形順序になること，すなわち

1/　(5) は，正確には $\forall x[x\in S\Longrightarrow x\leq u]$ と書くべきところである．しかし，通常 $\forall x$ は省略される．すなわち，我々は (5) を“全称解釈”しているのである．(6) も同様である．強調したいときは $\forall$ をつけることがある．たとえば (7) のように．

$$x, y \in S \implies x < y \vee x = y \vee y < x$$

が成り立つことである．なお，

(7) $$\forall x[x \in E \implies x \leq u]$$

なる要素 u が E の中にあれば，u を E の**最大元**という．u が最大元ならば u は極大元である．

定理 16.2（**第1極大原理**あるいは**ツォルンの補題**［61］）$\langle E, <_E \rangle$ が空でない順序集合で，その任意の鎖が上界をもつならば，E は極大元をもつ．

♯* **証明** 選択公理と同値な整列定理によって E を整列する．そのとき，E の各要素に順序数の添数を対応づけることができる．すなわち，ある順序数 η があって

$$E = \{e_0, e_1, e_2, \cdots, e_\nu, \cdots\}_{\nu<\eta}$$

とすることができる．超限帰納法によって（付録§27），E の要素の超限列

$$a_0 <_E a_1 <_E \cdots <_E a_\nu <_E \cdots$$

を次のように定義する：

1°） $a_0 = e_0$．

2°） $\nu > 0$ とする．2.1°）$\nu = \alpha+1$ で a_α が E の極大元である場合．$a_\nu = a_\alpha$ とし，ここで帰納法をうち切る．2.2°）そうでないとき．E の性質により，ある e_γ が $<_E$ に関する鎖 $\{a_\beta \mid \beta < \nu\}$ の上界となる．このような最小の順序数 γ をもつ e_γ を a_ν と定義すれば，明らかに

$$\alpha < \beta < \nu \implies a_\alpha <_E a_\beta <_E a_\nu.$$

この超限帰納法は，η より大きい最小の基数を $\aleph$ とするとき，$\aleph$ より小さいある順序数 ξ で止まる．なぜなら，E をどのように並べ変えて整列集合を作っても，その長さは $\aleph$ より小さいからである．このとき，停止した時点での

$$a_\xi$$

** は E の極大元である．□

注意 1 上の証明で，$a_0 = e_{\nu_0}$ として出発すれば，得られた極大元 a_ξ は

$$e_{\nu_0} \leq_E a_\xi$$

をみたす．したがって，E の任意の要素 e に対し，

$$e \leq_E u$$

をみたす E の極大元 u が存在することがわかる．□

次に，$\mathscr{F}$ を集合族とする．$\mathscr{F}$ が**有限性**（finite character）であるとは，

1°）　$\forall A \subseteq B \in \mathscr{F}[A:\text{有限} \Longrightarrow A \in \mathscr{F}]$,

2°）　$\forall A \subseteq B[A:\text{有限} \Longrightarrow A \in \mathscr{F}] \Longrightarrow B \in \mathscr{F}$

が成り立つときをいう．

定理 16.3（**第2極大原理**あるいは**テューキーの補題**［65］）　$\mathscr{F}$ が有限性をもつ空でない集合族ならば，$\mathscr{F}$ は包含関係 $\subseteq$ に関する極大集合をもつ．

*　**証明**　$\mathscr{F}$ の集合を $\subseteq$ によって順序づける．$\mathscr{F}$ の部分族 $\mathscr{F}'$ が鎖であれば，$B = \bigcup \mathscr{F}' = \bigcup \{C \mid C \in \mathscr{F}\}$ とおくとき，B の任意の有限部分集合 A は $\mathscr{F}$ に属する．（なぜなら，$\mathscr{F}'$ は鎖であるから，ある $C \in \mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ について $A \subseteq C$ となる．よって，1°）により $A \in \mathscr{F}$.）　そうすると 2°）によって，$B \in \mathscr{F}$．明らかに，B は $\mathscr{F}'$ の上界である．ゆえに，順序集合 $\langle \mathscr{F}, \subseteq \rangle$ は
#** ツォルンの補題の条件をみたし，したがってそれは極大元をもつ．□

注意 2　上の証明でツォルンの補題を適用する際，注意1を利用すれば，$\mathscr{F}$ の任意の集合 X に対し

$$X \subseteq M$$

をみたす $\mathscr{F}$ の極大元 M が存在することがわかる．□

これらが選択公理を導き，したがって選択公理と同値な命題であることは，後の節で説明する．

次に，コンパクト性の特徴づけについて述べよう．集合族 $\mathscr{F}$ が**有限交叉性**をもつとは，$\mathscr{F}$ に属する任意の有限個の集合 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ について $A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \phi$ が成り立つことである．よって，$A \in \mathscr{F}$ ならば $A \neq \phi$ である．たとえば，$\mathscr{F} = \{(0, 2^{-n}) \mid n \in \omega\}$ なる $\mathscr{F}$ は有限交叉性をもつ．

補題 1　位相空間 T がコンパクトであるための必要十分条件は，

（8）　$\begin{cases} T\text{ の閉集合からなる任意の空でない集合族 } \mathscr{F} \text{ について，} \mathscr{F} \text{ が} \\ \text{有限交叉性をもつならば } \bigcap \mathscr{F} = \bigcap \{F \mid F \in \mathscr{F}\} \text{ は空でない} \end{cases}$

が成り立つことである.

*　**証明**　$\mathscr{G}$ を T の任意の開被覆とする: $T=\bigcup\mathscr{G}$. $\mathscr{F}=\{F \mid F^c\in\mathscr{G}\}$ とすれば, $\mathscr{F}$ は閉集合の空でない集合族で, $\bigcap\mathscr{F}=\phi$ となる. この逆もいえる. よって, $\mathscr{G}$ が空でない開集合族を, $\mathscr{F}$ が空でない閉集合族を動くとして, 次の同値関係が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
& T\text{ がコンパクトである}\\
\iff & \forall\mathscr{G}[\bigcup\mathscr{G}=T \Longrightarrow \exists\mathscr{G}'\subseteq\mathscr{G}\{\mathscr{G}'\text{ は有限}\wedge\bigcup\mathscr{G}'=T\}]\\
\iff & \forall\mathscr{F}[\bigcap\mathscr{F}=\phi \Longrightarrow \exists\mathscr{F}'\subseteq\mathscr{F}\{\mathscr{F}'\text{ は有限}\wedge\bigcap\mathscr{F}'=\phi\}]\\
\iff & \forall\mathscr{F}[\forall\mathscr{F}'\subseteq\mathscr{F}\{\mathscr{F}'\text{ は有限}\Longrightarrow\bigcap\mathscr{F}'\neq\phi\}\Longrightarrow\bigcap\mathscr{F}\neq\phi]
\end{aligned}
$$

** 最後の式はちょうど (8) を表しているので, 補題1が証明された. □

これは少し言い換えると, 次の形になる. ただし, 集合族 $\mathscr{F}$ に対し $\bigcap\overline{\mathscr{F}}=\{\overline{X}\mid X\in\mathscr{F}\}$ とする.

補題 2　T がコンパクトであるための必要十分条件は,

$$
(9)\quad\begin{cases} T\text{ の空でない集合族 }\mathscr{F}\text{ について, }\mathscr{F}\text{ が有限交叉性をもてば}\\ \bigcap\overline{\mathscr{F}}\neq\phi\end{cases}
$$

が成り立つことである.

もう一つの準備として, 直積位相の記法について一言しておこう. 前出の (3), (4) を考える.

$f\in T$, $X\subseteq T$ とする. 各 $\lambda\in\Lambda$ に対し

$$P_\lambda(f)=f(\lambda),\qquad P_\lambda[X]=\{f(\lambda)\mid f\in X\}$$

を, それぞれ f, X の λ-座標への**射影**という. 短く λ-射影といってもよい. その逆写像 P_λ^{-1} は, $X_\lambda\subseteq T_\lambda$ に対し

$$P_\lambda^{-1}[X_\lambda]=\{f\in T\mid f(\lambda)\in X_\lambda\}$$

である. この記法を使うと, $\mathscr{S}_{\lambda_0}$ のメンバー ((4) を参照)

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda,\qquad X_\lambda=\begin{cases}U_{\lambda_0}\in\mathscr{O}_{\lambda_0} & (\lambda=\lambda_0\text{ のとき})\\ T_\lambda & (\lambda\neq\lambda_0\text{ のとき})\end{cases}$$

は, 次の形に表される:

$$P_{\lambda_0}{}^{-1}[U_{\lambda_0}].$$

よって，T の位相を与える部分基 $\mathscr{S}$ は

$$\mathscr{S} = \{P_\lambda{}^{-1}[U_\lambda] \mid U_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$$

となり，T の開基に属する開集合 U は

$$\begin{aligned} U &= P_{\lambda_0}{}^{-1}[U_{\lambda_0}] \cap P_{\lambda_1}{}^{-1}[U_{\lambda_1}] \cap \cdots \cap P_{\lambda_n}{}^{-1}[U_{\lambda_n}] \\ &= \{f \in T \mid f(\lambda_0) \in U_{\lambda_0},\ f(\lambda_1) \in U_{\lambda_1},\ \cdots,\ f(\lambda_n) \in U_{\lambda_n}\} \end{aligned}$$

という形に表される．ただし，$U_{\lambda_i} \in \mathscr{O}_{\lambda_i}$ である．

以上で準備が完了したから，チコノフの定理の証明に移ろう．

*　**定理 16.1 の証明**　補題2によって，$\mathscr{F}$ が T の部分集合の空でない族で，有限交叉性をもつとするとき，次が成り立つことをいえばよい：

(10)
$$\bigcap \overline{\mathscr{F}} = \bigcap \{\overline{X} \mid X \in \mathscr{F}\} \neq \phi.$$

$\boldsymbol{F}$ を T の部分集合の空でない族で有限交叉性をもつもの全体の集合とする．

\#　明らかに $\boldsymbol{F}$ は有限性をもっている．ゆえに，第2極大原理と注意2によって，$\boldsymbol{F}$ は $\mathscr{F}$ を含む極大族 $\mathscr{F}_M$ をもつ．$\mathscr{F}_M$ が

$$\bigcap \overline{\mathscr{F}_M} \neq \phi$$

をみたせば (10) が成り立つことは明らかである．よって，与えられた $\mathscr{F}$ は初めから $\boldsymbol{F}$ の極大族であると仮定してよい．そこで，$\mathscr{F}$ は有限交叉性をもつ極大族であるとする．したがって，極大性から

(a)　$X \in \mathscr{F},\ X \subseteq Y \implies Y \in \mathscr{F}$,

(b)　$X \in \mathscr{F},\ Y \in \mathscr{F} \implies X \cap Y \in \mathscr{F}$,

(c)　$\forall X \in \mathscr{F}[Z \cap X \neq \phi] \implies Z \in \mathscr{F}$

が成り立つ．また，

$$\{P_\lambda[X] \mid X \in \mathscr{F}\}$$

は有限交叉性をもつ．なぜなら，$X_0, X_1, \cdots, X_n \in \mathscr{F}$ ならば $X_0 \cap X_1 \cap \cdots \cap X_n \neq \phi$ であり，したがって

$$\phi \neq P_\lambda[X_0 \cap X_1 \cap \cdots \cap X_n] \subseteq P_\lambda[X_0] \cap P_\lambda[X_1] \cap \cdots \cap P_\lambda[X_n]$$

となるからである．各 T_λ はコンパクトであるから，

(11)
$$x_\lambda \in \bigcap \{\overline{P_\lambda[X]} \mid X \in \mathscr{F}\}$$

なる x_λ が存在する（選択公理により選出する）．そこで，

$$\text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して，} f(\lambda) = x_\lambda$$

なる $f \in T$ を定義する．各 T_λ における x_λ の任意の近傍 U_λ に対し，(11) によって

$$\forall X \in \mathscr{F} [U_\lambda \cap P_\lambda[X] \neq \phi]$$

が成り立つから，(c) によって

$$P_\lambda^{-1}[U_\lambda] \in \mathscr{F} \tag{12}$$

である．$\mathscr{F}$ は有限交叉性をもつので，(12) なる形の集合の有限個の共通部分は空でなく，(b) によって $\mathscr{F}$ のメンバーである．T における要素 f の近傍系の基はこのような有限個の共通部分全体の族として得られるので，この基のどのメンバーも $\mathscr{F}$ に属する．したがって，その各メンバーは $\mathscr{F}$ のどのメンバーとも交わる．このことは，

$$\text{すべての } X \in \mathscr{F} \text{ に対して，} f \in \overline{X}$$

であることを意味する．したがって

$$\bigcap \{\overline{X} \mid X \in \mathscr{F}\} \neq \phi$$

** これで，チコノフの定理が証明された．□

1950 年になって，チコノフの定理から選択公理が導かれることが証明された（ケリー［41］）．したがって，チコノフの定理は選択公理と同値な命題であることがわかったわけである．これを証明しよう：

定理 16.4　ZF において，チコノフの定理を仮定すれば選択公理が成り立つ．

* **証明**　$\mathscr{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を与えられた集合族とする．ただし，すべての $\lambda \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \neq \phi$ であるとする．チコノフの定理を用いて集合 $\mathscr{A}$ の選択関数 f を作るのが，我々の目的である．

$$a \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

なる対象 a をとり，各 A_λ に a を添加して

$$T_\lambda = A_\lambda \cup \{a\}$$

を作り，T_λ の閉集合全体の族 $\mathscr{F}_\lambda$ を　　　.

$$X \in \mathscr{F}_\lambda \iff X = A_\lambda \vee X = T_\lambda \vee [X \text{ は } T_\lambda \text{ の有限部分集合}]$$

によって定義して T_λ へ位相を入れる．したがって，T_λ の開集合系 $\mathscr{O}_\lambda$ は

$$X \in \mathscr{O}_\lambda \iff X = \{a\} \vee X = \phi \vee [X \text{ は } T_\lambda \text{ の co-finite 部分集合}]$$

となる．積空間

$$T = \prod_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$$

を考える．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$Z_\lambda = \{ f \in T \mid f(\lambda) \in A_\lambda \}$$

とすれば，Z_λ は T の閉集合である．なぜなら，

$$Z_\lambda{}^c = P_\lambda{}^{-1}[T_\lambda - A_\lambda] = P_\lambda{}^{-1}[a]$$

は T の部分基の一つのメンバーだからである．各 T_λ はコンパクトである[1)].

♯　よってチコノフの定理により積空間 T はコンパクトである．T の部分集合の族

$$\mathscr{B} = \{ Z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$$

は有限交叉性をもつので，補題2によって

$$\bigcap \overline{\mathscr{B}} = \bigcap \{ \overline{Z_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda \} \neq \phi.$$

しかし，$\overline{Z_\lambda} = Z_\lambda$ である[2)]から

$$\bigcap \mathscr{B} = \bigcap \{ Z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \} \neq \phi.$$

$f \in \bigcap \mathscr{B}$ とすれば，f は集合族 $\mathscr{A}$ の選択関数である．

1)　$\mathscr{G} = \{ G_\xi \mid \xi \in \Lambda \}$ を T_λ の任意の開被覆とする．G_ξ のうち（T_λ の）co-finite 部分集合になっているものを一つとり，それを G_{ξ_0} とすると $G_{\xi_0} = T_\lambda - \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ と表せる．$T_\lambda = \bigcup \{ G_\xi \mid \xi \in \Lambda \}$ であるから，各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対しある ξ_i があって $x_i \in G_{\xi_i}$．このとき $T_\lambda = G_{\xi_0} \cup G_{\xi_1} \cup \cdots \cup G_{\xi_n}$ である．よって，$\mathscr{G}$ は有限部分開被覆をもつ．

2)　任意に $f \in \overline{Z_\lambda}$ をとる．もし $f(\lambda) \notin A_\lambda$ なら $f(\lambda) = a$ でなければならない．f の近傍 $P_\lambda{}^{-1}[a]$ を考えると，それは Z_λ と交わる．よって，$g \in P_\lambda{}^{-1}[a] \cap Z_\lambda$ とすれば，$g(\lambda) = a$, $g(\lambda) \in A_\lambda$ となり，不合理．ゆえに $f(\lambda) \in A_\lambda$，したがって $f \in Z_\lambda$．

⁑　以上で，定理 16.4 が証明された．□

上記の証明で，特定の空でない集合 M から一要素 x を取り出すという操作

を行なった（§12, 14 でも少しふれた）．このこと自体は選択公理を必要としない．万人が認める論理の公理に基づいているだけだからである．少し解説しよう．

述語論理の体系で，Γ を閉論理式の有限列とし，述語論理の公理と Γ の論理式とから推論規則を有限回使って論理式 P が導出されるとき

$$\Gamma \vdash P$$

と書く．（ここの解説の用語・定義などについては，付録§26 またはたとえば［13］を参照されたい．）　いま閉論理式 $\exists x Q(x)$ と P とがあって，まず

(13) $$\Gamma \vdash \exists x M(x)$$

(14) $$\Gamma \vdash M(x) \to P$$

とする．このとき，（この体系での）推論規則により（14）から

(15) $$\Gamma \vdash \exists x M(x) \to P$$

が成り立つ．これと（13）と別な推論規則とによって

(16) $$\Gamma \vdash P$$

が導かれる．さて，ここで（13）は集合 M が空でないことが証明されたことだと考えよう．そのとき（14）は，M から一要素 x を取り出し，それを用いて命題 P を導き出したということを表す．そのとき推論規則は（15）の成立を保証するから，結局（16）が得られ，P が定理となる，という論法なわけである．有限回選出の場合も同様で，もし

(13′) $$\Gamma \vdash \exists x M_1(x) \wedge \exists x M_2(x) \wedge \cdots \wedge \exists x M_n(x)$$

(14′) $$\Gamma \vdash (M_1(x_1) \wedge M_2(x_2) \wedge \cdots \wedge M_n(x_n)) \to P$$

であれば，やはり

(16) $$\Gamma \vdash P$$

が導かれ，この推論には選択公理は必要でないのである．そして以上のことは，我々が通常行なっている推論を形式化し明確にしたものに他ならない．

可分距離空間

位相空間論と選択公理の関連はたいへん密なものでありたくさんの実例があるが，この話題は可分距離空間についての一定理をもっておしまいにしよう．

位相空間 T が**可分**（separable）であるとは，T の可算部分集合 D で，稠密なもの（すなわち $\overline{D}=T$ なるもの）が存在することである．

定理 16.5　可分距離空間の部分空間は，可分距離空間である．

* **証明**　T を距離空間（距離関数を d）とし，T のある可算部分集合 D が $\overline{D}=T$ をみたすとしよう．したがって，D の要素を並べて

$$D = \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

とする．S を T の任意の部分空間とする（すなわち，$S\subseteq T$ であって，S の位相が相対位相（T の位相の S への制限）となっているもの）．S の（高々）可算部分集合 E（S が有限集合のときだけ E が有限集合となる）

$$E = \{e_0, e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$$

を次のように定義する（重複があるかもしれない）．S の一点 s をとって固定しておく．各 $n\in\omega$ に対し

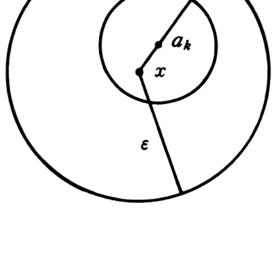
\# $$e_n = \begin{cases} U(a_{\pi_1(n)}; r_{\pi_2(n)})\cap S \text{ の一要素} & (U(a_{\pi_1(n)}; r_{\pi_2(n)})\cap S \neq \phi \text{ のとき}) \\ s & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

とする．ただし，π_1, π_2 はカントルの対関数 $\pi(k, l)$ の逆関数である：$\pi(\pi_1(n), \pi_2(n))=n$．また，$\{r_n \mid n\in\omega\}$ は正の有理数全体を並べたものとする．

このとき，集合 E は S で稠密である．以下，その証明：任意に $x\in S$ をとり，x の任意の近傍 $U(x;\varepsilon)\cap S$ を考える．D は T で稠密であるから，

$$a_k \in U(x;\varepsilon)$$

なる a_k がある．確定のため，このような最小番号の a_k をとっておく．



$$d(x, a_k) < r_l < \varepsilon$$

となる有理数 r_l がある．$\pi(k, l)=n$ とすれば，$k=\pi_1(n)$, $l=\pi_2(n)$ である．そうして

$$x \in U(a_{\pi_1(n)}; r_{\pi_2(n)})\cap S$$

であるから，

$$e_n \in U(a_{\pi_1(n)};\ r_{\pi_2(n)}) \cap S \subseteq U(x;\varepsilon) \cap S.$$

* したがって $x \in \bar{E}^S$ ($\bar{E}^S$ は S における閉包の意). ゆえに E は S で稠密である.□

この証明で（可算）選択公理が関わるのは ♯ 印のところで，e_n をすべての $n \in \omega$ にわたって選出する際に必要となる．そして後述するように，選択公理なしにはこの定理を証明できないことが示されるのである．

§17 関数解析学と選択公理

関数解析においても，選択公理はほとんど必須の手段と言っても過言ではないであろう．しかし第3章がかなり長くなったので，ここでは序論で述べた二つの話題のみを取り扱うことにする．

基底の存在

ベクトル空間の基底の問題を関数解析学の項におくのが適当であるかどうか疑問もあるであろうが，少なくとも関数解析学では無限次元ベクトル空間を取り扱うからという理由で本項に含めた．まず，係数体 K 上のベクトル空間 V を考える．V の要素たちの集合 $\{\boldsymbol{v}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の一次結合とは，

(1) $$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \boldsymbol{v}_\lambda, \qquad a_\lambda \in K$$

なる形に表される V の要素のことである．ただし，a_λ は有限個を除いて0であるとする．本項では，(1) はいつもこの意味であるとする．もし

(2) $$\forall \lambda \in \Lambda [a_\lambda = 0] \Longleftrightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \boldsymbol{v}_\lambda = \boldsymbol{0}$$

ならば，$\{\boldsymbol{v}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は**一次独立**であるという．また，V の任意の要素 $\boldsymbol{u}$ が

(3) $$\boldsymbol{u} = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \boldsymbol{v}_\lambda$$

の形に**一意的に**表されるならば，$B = \{\boldsymbol{v}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は V の**基底**であるという．そのとき，

定理 17.1 任意のベクトル空間は基底をもつ．

* **証明**　いろいろな証明法がある．筆者は整列定理のもとで超限帰納法によって基底を定義する方法を好むが，第1極大原理（ツォルンの補題）による方がポピュラーであろうか．ここでは後者に従おう．V を K 上のベクトル空間とする．$\mathscr{A}$ を V の次のような部分集合 A たちの族とする：

$$A \in \mathscr{A} \iff A \text{ の任意の有限部分集合が一次独立.}$$

$\mathscr{L}$ を $\subseteq$ に関する $\mathscr{A}$ の任意の鎖とする．$\bigcup\mathscr{L}$ は明らかに $\mathscr{L}$ の上界である．
\# よって，ツォルンの補題により $\mathscr{A}$ は極大要素をもつ．その一つを B とする．B は V の基底である．なぜなら，$B=\{\boldsymbol{v}_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ とおくとき，B の任意の有限個は一次独立だから，(3) なる表現は一意的である．そこで，もし B が基底でないとすれば，(3) の形に表示できない V の要素 $\boldsymbol{u}$ がある．$\boldsymbol{u}$ は B に属さないので，$B\cup\{\boldsymbol{u}\}$ を作れば，いまのことから $B\cup\{\boldsymbol{u}\}\in\mathscr{A}$ となる．これ
** は B の極大性に反する．よって，B は基底である．□

なお，基底定理をこのように一般的に述べたのはハウスドルフの 1932 年の論文 [38] が最初のようである．実数空間 $\mathscr{R}$ を有理数体 Q を係数体とするベクトル空間と考えたときの基底はハーメル基とよばれ，すでに述べたように早くも 1905 年に世に現れた [34]．

なお近年，定理 17.1 から選択公理が導かれることがブラスによって証明された [26]．したがって，ベクトル空間の基底定理は選択公理と同値である．

ハーン‐バナッハの拡張定理

これも有名な定理である．関数解析学の基本原理の一つと言える．基本定理の証明に選択公理が必要ということは，関数解析が選択公理なしには展開しえないことを意味するであろう．事実，この分野のある書物は“本書では選択公理をなんの弁明もなく使用する”と言いきっている．

さて，実数体 $\mathscr{R}$ 上のベクトル空間 V を考える．V で定義された実数値関数 $g: V \longrightarrow \mathscr{R}$ が次の条件

(4)　$$g(x+y) \leq g(x)+g(y),$$

(5)　$$g(\alpha x) = \alpha x \qquad (\alpha \geq 0 \text{ に対して})$$

をみたすとき，g を（V 上の）**亜線形**汎関数とよぶことにしよう．また，g が

（6）　$$g(\alpha x+\beta y)=\alpha g(x)+\beta g(y),\qquad \alpha,\beta\in\mathscr{R}$$

をみたすとき，g を線形汎関数という．

定理 17.2（ハーン-バナッハの拡張定理）　W を $\mathscr{R}$ 上のベクトル空間 V の部分空間とする．g が V 上の亜線形汎関数，f が W 上の線形汎関数で，$f(x)\leq g(x)$ $(x\in W)$ がみたされているとする．そのとき，V 上の線形汎関数 F で

（7）　$$F(x)\leq g(x)\qquad (x\in V)$$

（8）　$$F(x)=f(x)\qquad (x\in W)$$

をみたすものが存在する．F を f の（加法的）**拡大**という．

大部分の本には，整列定理を使った証明が書いてある．そこで本書では，多少長くなるが，整列定理（$\Longleftrightarrow$ 選択公理）より真に弱いことが知られている次の命題に基づいた証明を紹介する：

定理 17.3（ハウスドルフ空間に関するチコノフの定理）　コンパクト・ハウスドルフ空間の任意個の積空間は，コンパクト空間である．

この定理は BPI（ブール代数の素イデアル存在定理）から導かれる．これについては次節で説明する．準備として，いくつかの概念と補題を述べる．ここのところは，ウォシュとリール・ナルジェフスキー［45］に負うている．

Y はコンパクト空間とする．Z を集合とし，各 $\varphi\in Y$ に，Z の部分集合族で有限性をもつもの $\mathscr{F}_\varphi$ が対応づけられているとする．また，$E\subseteq Z$ に対し

$$T(E)=\{\varphi\in Y\mid E\in\mathscr{F}_\varphi\}$$

とおく．このとき，もし

（9）　$$\forall E\subseteq Z[E:\text{有限}\implies\exists\varphi\in Y:E\in\mathscr{F}_\varphi],$$

（10）　$$\forall E\subseteq Z[E:\text{有限}\implies T(E)\text{は}\ Y\ \text{で閉集合}]$$

が成り立つならば，$\{\mathscr{F}_\varphi\mid\varphi\in Y\}$ は有限性族のコンパクト族であるとよぼう．

補題 1　$\{\mathscr{F}_\varphi\mid\varphi\in Y\}$ が Z の有限性部分集合族のコンパクト族であれば，

$$\varphi_0\in Y,\qquad Z\in\mathscr{F}_{\varphi_0}$$

をみたす φ_0 が存在する．

*　**証明**　$E_1, E_2, \cdots, E_n$ を Z の任意の有限個の有限部分集合とすれば，$\mathscr{F}_\varphi$ の有限性と (9) により

$$\bigcap_{i=1}^{n} T(E_i) \supseteq T\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \neq \phi .$$

仮定により，$T(E_i)$ は閉集合．よって，$\{T(E) \mid E \subseteq Z, E: \text{有限}\}$ は有限交叉性をもつ閉集合族である．Y はコンパクト空間であるから，

$$T \underset{\mathrm{def}}{=} \bigcap \{T(E) \mid E \subseteq Z,\ E: \text{有限}\} \neq \phi .$$

そこで $\varphi_0 \in T$ をとれば，$\varphi_0 \in Y$ であって

$$E \subseteq Z,\ E: \text{有限} \implies E \in \mathscr{F}_{\varphi_0} .$$

**　ゆえに，$\mathscr{F}_{\varphi_0}$ の有限性によって $Z \in \mathscr{F}_{\varphi_0}$ である．□

集合 Z の各要素 X に（空でない）コンパクト・ハウスドルフ空間 P_X が対応づけられているとする．

$S = \bigcup \{P_X \mid X \in Z\}$ とし，R を S 上の関係とする:

$$R \subseteq S \times S .$$

R が集合族 $\{P_X \mid X \in Z\}$ の**整合関係**であるとは，R が対称であって，二つの異なる任意の P_{X_1}, P_{X_2} について R が $P_{X_1} \times P_{X_2}$ において閉集合であることとする．

$$\varphi : Z \longrightarrow \bigcup \{P_X \mid X \in Z\}, \qquad \varphi(X) \in P_X$$

なる選択関数 φ，整合関係 R および $E \subseteq Z$ に対し

(11)　　$X_1, X_2 \in E,\ X_1 \neq X_2 \implies \langle \varphi(X_1), \varphi(X_2) \rangle \in R$

が成り立つならば，φ は E 上で ***R*-整合的**であるという．

補題 2　上記の定義のもとに，Z の任意の有限部分集合 E に対し（族 $\{P_X \mid X \in Z\}$ に対する）E 上の R-整合的選択関数が存在するならば，Z 上の R-整合的選択関数が存在する．

#*　**証明**　ハウスドルフ空間に関するチコノフの定理によって，積空間

$$Y = \prod_{X \in Z} P_X$$

はコンパクトである．Y の要素は族 $\{P_X \mid X \in Z\}$ の選択関数である．（Y が空でないことも BPI から証明されるが，ここではその証明は略す．我々の目的にこの補題を使うのは，P_X が具体的に与えられ，$Y \neq \phi$ なることが自明である場合である．）各 $\varphi \in Y$ に対し

$$\mathscr{F}_\varphi = \{E \subseteq Z \mid \varphi \text{ は } E \text{ 上で } R\text{-整合的}\}$$

とすると，$\mathscr{F}_\varphi$ は有限性族である．このとき，$\{\mathscr{F}_\varphi \mid \varphi \in Y\}$ はコンパクト族となる．なぜなら，(9) は補題の仮定に他ならない．(10) を証明するために，$\varphi \in \overline{T(E)}$ かつ $\varphi \notin T(E)$ としよう．すると，

$$X_1, X_2 \in E, \qquad X_1 \neq X_2, \qquad \langle \varphi(X_1), \varphi(X_2) \rangle \notin R$$

なる X_1, X_2 が存在する．R は $P_{X_1} \times P_{X_2}$ で閉集合であるから，$\langle \varphi(X_1), \varphi(X_2) \rangle$ のある近傍 $U_1 \times U_2$ に対し

(12)　$$\langle p_1, p_2 \rangle \in U_1 \times U_2 \implies \langle p_1, p_2 \rangle \notin R.$$

そこで，

$$U(\varphi) = \prod_{X \in Z} U_X, \qquad U_X = \begin{cases} P_X & (X \neq X_1,\ X \neq X_2 \text{ のとき}) \\ U_1 & (X = X_1 \text{ のとき}) \\ U_2 & (X = X_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を作る．$\varphi \in \overline{T(E)}$ だから，$U(\varphi) \cap T(E) \neq \phi$．よって，$\psi \in U(\varphi) \cap T(E)$ なる ψ をとると，$\langle \psi(X_1), \psi(X_2) \rangle \in R$ であるが，(12) により $\langle \psi(X_1), \psi(X_2) \rangle \notin R$．これは不合理．よって，$\varphi \in \overline{T(E)} \implies \varphi \in T(E)$．

そこで補題 1 を適用して，$\varphi_0 \in Y$, $Z \in \mathscr{F}_{\varphi_0}$ なる φ_0 が存在する．φ_0 は Z 上の R-整合的選択関数である．□

以上の準備のもとに，ハーン-バナッハの拡張定理の証明に移ろう：

定理 17.2 の証明　g が亜線形であることから，

(13)　$$-g(-x) \leq g(x) \qquad (x \in V)$$

が成立する．

Z を V の有限部分集合全体の集合とする．各 $X \in Z$ に対し，$\overline{\overline{X}} = n$ とおく

とき

$$P_X = \prod_{x\in X}[-g(-x), g(x)] \qquad (n \text{ 次元閉区間})$$

と定義する．P_X の各要素 p は

(14)　$$-g(-x) \leq p(x) \leq g(x) \qquad (x\in X)$$

をみたす X 上の関数と考えてよい．p が（W 上の線形）汎関数 f の**部分拡大**であるとは，

(15)　$$p(x) = f(x) \qquad (x\in W\cap X)$$

(16)　$$x_1, x_2, x_1+x_2 \in X \Longrightarrow p(x_1+x_2) = p(x_1)+p(x_2)$$

(17)　$$x, \alpha x \in X \Longrightarrow p(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad (\alpha\in \mathscr{R})$$

が成り立つことである．

そこで $S=\bigcup\{P_X \mid X\in Z\}$ 上の関係 R を，任意の $X_1, X_2\in Z$, $p_1\in P_{X_1}$, $p_2\in P_{X_2}$ に対し

(18)　$$\langle p_1, p_2\rangle \in R \iff \begin{cases} p_1, p_2 \text{ は } f \text{ の部分拡大で} \\ X_1\cap X_2 \text{ 上で } p_1=p_2 \text{ である} \end{cases}$$

によって定義する．このとき，

主張　(i)　R は集合族 $\{P_X \mid X\in Z\}$ に対する整合関係である．

(ii)　Z の各**有限**部分集合 E に対し，E で R-整合的な（この族の）選択関数 φ が存在する．

なんとなれば:（i）　R が $P_{X_1}\times P_{X_2}$ で閉集合であることを証明するために，任意の $\langle p_1, p_2\rangle \in \overline{R}$ なる $p_1\in P_{X_1}$, $p_2\in P_{X_2}$ をとる．$\langle p_1, p_2\rangle \notin R$ と仮定しよう．もし p_1 が f の部分拡大でないなら，

(a)　$x_0\in W\cap X_1$, $p_1(x_0)\neq f(x_0)$,　または

(b)　$x_0+y_0\in X_1$, $p_1(x_0+y_0)\neq p_1(x_0)+p_2(y_0)$,　または

(c)　$\alpha x_0\in X_1$, $p_1(\alpha x_0)\neq \alpha p_1(x_0)$

なる $x_0, y_0\in X_1$, $0\neq\alpha\in\mathscr{R}$ が存在する．いま

$$U_1(p_1;\varepsilon) = \{r\in P_{X_1} \mid \forall x\in X_1[|r(x)-p_1(x)|<\varepsilon]\}$$

とおこう．ただし ε は正数である．たとえば（c）が起こったとしよう．$0<\varepsilon<|p_1(\alpha x_0)-\alpha p_1(x_0)|$ なる ε をとると，$U_1(p_1;\varepsilon/(1+\alpha))$ に属する r は（p

$=r$ として）（17）をみたさない．よって $U_1(p_1;\varepsilon/(1+\alpha))\times P_{X_2}\frown R=\phi$ となり，仮定 $\langle p_1,p_2\rangle\in\bar{R}$ に反する．（a）または（b）の場合も同様にして不合理が生ずる．よって，p_1 は f の部分拡大でなければならない．p_2 もそうである．したがって，$\langle p_1,p_2\rangle\notin R$ より

$$p_1(x_0)\neq p_2(x_0),\qquad x_0\in X_1\frown X_2$$

なる x_0 が存在しなければならない．$0<\varepsilon'<|p_1(x_0)-p_2(x_0)|$ なる ε' をとると

$$U_1(p_1;\varepsilon'/2)\times U_2(p_2;\varepsilon'/2)\frown R=\phi$$

となるから，不合理．こうして，$\langle p_1,p_2\rangle\in\bar{R}$ ならば $\langle p_1,p_2\rangle\in R$ でなければならないことがわかった．よって，R は $P_{X_1}\times P_{X_2}$ において閉集合である．

（ii）E を Z の有限部分集合とする．（11）をみたす $\{P_X\mid X\in Z\}$ の選択関数 φ の存在を示すのである．$X\notin E$ なる X に対しては

$$\varphi(X)(x)=0\qquad(x\in X)$$

と定める．$X\in E$ なる X に対しては，与えられた f を次のように加法的に拡張した線形汎関数 f^* を作り

$$\varphi(X)(x)=f^*(x)\qquad(x\in X)$$

とする．f^* は次のように構成される．まず，$x\in W\frown X$ なる x に対しては，$f^*(x)=f(x)$ とする．$X-W\neq\phi$ ならば，$x_1\in X-W$ をとる．W と x_1 とで張られる部分空間 $[W,x_1]$ へ f を加法的に拡張して

（19）$$f_1(y)\leq g(y)\qquad(y\in[W,x_1])$$

がみたされるように f_1 を作る．それには，

$$[W,x_1]=\{y\mid y=w+\alpha x_1,\ w\in W,\ \alpha\in\mathscr{R}\}$$

であるから，$y=w+\alpha x_1$ に対し

（20）$$f_1(y)=f(w)+\alpha\beta$$

と定義すればよい．ここに β は

$$\sup_{v\in W}(-g(-v-x_1)-f(v))\leq\beta\leq\inf_{u\in W}(g(u+x_1)-f(u))$$

なる一つの実数である．確定のため β はこの区間の左端とする．

$$f(u)-f(v)=f(u-v)\leq g(u-v)\leq g(u+x_1)+g(-v-x_1)$$

$$\therefore \quad -g(-v-x_1)-f(v) \leq g(u+x_1)-f(u)$$

であるから，このような実数 β は存在する．このとき（20）なる f_1 は（19）を満足する（$\alpha>0,\ \alpha=0,\ \alpha<0$ の三つの場合に分けてチェックすればよい; $\alpha \neq 0$ のとき $y/\alpha = w/\alpha + x_1$ を考える）．

次に $X-[W, x_1] \neq \phi$ なら，$x_2 \in X-[W, x_1]$ をとり f_1 を部分空間 $[W, x_1, x_2]$ へ同様に拡張し f_2 を作る．この操作は，X が有限集合だから，有限回で終わる．終了した時点で得られた線形汎関数を f^* とする．f^* は

$$f^*(x) \leq g(x) \qquad (x \in X)$$

をみたし，f の部分拡大になっている．これで φ の定義が終わった．E は有限個の有限集合たちの集合であるから，あの β の選択は有限回行なわれるだけであり，選択公理は不要である．そして，φ は明らかに（11）を満足する．

♯　以上で“主張”の証明が終わった．これにより補題2が適用できるから，Z 上で R-整合的な選択関数 φ_0 の存在がいえた．そこで

$$F: V \longrightarrow \mathscr{R}$$

を，$x \in V$ に対し

（21）
$$F(x) = \varphi_0(X)(x) \qquad (x \in X \in Z)$$

によって定義する．$X_1, X_2 \in Z$, $x \in X_1 \cap X_2$ ならば $\varphi_0(X_1)(x) = \varphi_0(X_2)(x)$ であるから，（21）の定義は合法的である．F は f を全空間 V へ拡張した線形汎関数で，

$$-g(-x) \leq F(x) \leq g(x) \qquad (x \in V)$$

⁑　をみたす．□（補遺Ⅴを参照）

以上で，ハーン-バナッハの拡張定理がハウスドルフ空間に対するチコノフの定理から（選択公理を直接使わないで）証明されたのである．

このような証明は面倒なだけであまり益がないと思われる読者もあるかもしれない．普通は，ベクトル空間 V を整列するという強力な選択公理に基づいて証明が行なわれる．それは，上の証明の末尾の部分をこの整列順序にそって超限的に実行すればよいので，はるかに短いスペースですんでしまう．しかし，この整列は実質的に $\mathscr{R}$ を整列することを含んでいる．ところが $\mathscr{R}$ の整列

からは，非常に奇妙な結果——逆理とも思えるような結果——が導かれる．それゆえ，ハーン-バナッハの拡張定理のような基本的な結果が，そのような強い仮定に依存していることは好ましくないであろう．ハウスドルフ空間に関するチコノフの定理は，選択公理より真に弱い命題であることがわかっているので，そういうものから導かれる結果はより安全であると言えるわけである．

なお，超準解析（non-standard analysis）の方法を用いると，（選択公理を用いないで）BPI からハーン-バナッハの拡張定理を導くことができる．

§18　代数学に現れる選択公理

代数学においても，領域が無限集合である代数系を取り扱い，領域からの要素の無限回の選出を行なうことによって，選択公理のお蔭をこうむることがしばしばある．そして，代数学では選択公理よりもむしろ（それと同値な）ツォルンの補題の方が適用しやすいようである．もちろん，このことは代数学に限るものではなく，他の分野でもよく起こることである．それは，すでに一例が§16 に現れている．そして，その節では選択公理からツォルンの補題（定理 16.2）を導いたので，本節ではこの逆から始めることにしよう．

定理 18.1　ツォルンの補題から選択公理が導かれる．

* **証明**　先に，ツォルンの補題から第 2 極大原理が導かれた．よって，後者から選択公理が証明できればよい．そこで $\mathscr{F}$ を空でない集合の任意の族とする．

$$\mathscr{C} = \{f : f \text{ は } \mathscr{F} \text{ のある部分族の選択関数である}\}$$

なる $\mathscr{C}$ を考える．関数も“集合”であるから，二つの関数 f, g について包含関係 $g \subseteq f$ が考えられる．そのとき，$\mathscr{C}$ は有限性をもつ．［なぜなら，1）$g \subseteq f \in \mathscr{C}$ とする．（g を有限と限らなくても）g は $\mathscr{F}$ のある部分族の選択関数である．よって $g \in \mathscr{C}$．2）$\forall g \subseteq f\,[g:\text{有限} \Longrightarrow g \in \mathscr{C}]$ とする．もし $f \notin \mathscr{C}$ なら，$f(A) \notin A$ となる $A \in \mathscr{F}$ がある．$g = \{\langle A, f(A)\rangle\}$ は f の部分集合でしかも有限．ゆえに，仮定により $g \in \mathscr{C}$ である．したがって，

$f(A) \in A$ でなくてはならない．これは不合理．]

♯　ゆえに，第2極大原理によって $\mathscr{C}$ は極大元をもつ．その一つを f_0 とする．このとき f_0 の極大性により，$\mathrm{dom}(f_0) = \mathscr{F}$ でなければならない．[なぜなら，もし $B \in \mathscr{F} - \mathrm{dom}(f_0)$ なら，B から一点 b をとり（選択公理不要），$f_1 = f_0 \cup \{\langle B, b \rangle\}$ とすれば，f_1 は $\mathscr{F}$ の部分族の選択関数となるから $f_1 \in \mathscr{C}$．$f_0 \subsetneqq f_1$ なるゆえ，これは f の極大性に反する．]

⁑　よって，f_0 は $\mathscr{F}$ の選択関数である．□

上の証明によって，結局，三つの命題が同値であることがわかった．すなわち

定理 18.2　選択公理，ツォルンの補題，および第2極大原理は互いに同値である．

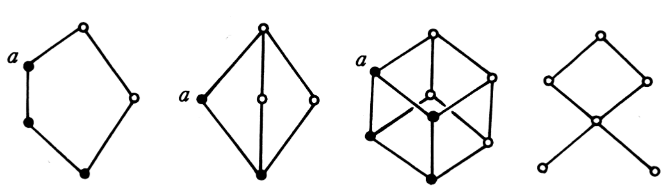
極大原理を束のイデアルに適用すると，極大イデアルの存在が導かれる．順序集合 $\langle L, < \rangle$ において，任意の2要素 a, b に対し，その最小上界（上限）$a \cup b$，最大下界（下限）$a \cap b$ が存在するならば，L を**束**という．L の空でない部分集合 J が次の条件

1）　$a \in J, b \leq a \implies b \in J$,

2）　$a, b \in J \implies a \cup b \in J$

をみたすならば，J を（L の）**イデアル**という．したがって，L 自身イデアルである．L 自身でないイデアルを**本来のイデアル**とよぶことにする．

第1章§7で，ある種の順序集合に対する図形的表現——ダイヤグラム——について述べた．この意味で，下のダイヤグラムで与えられる有限順序集合 L_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ を考える．L_1, L_2, L_3 は束であるが，L_4 は束でない．L_i $(i \neq 4)$ において，部分集合 $J_i = \{x \in L_i \mid x \leq a\}$ は（L_i の）イデアルである．



L_1　　L_2　　L_3　　L_4

一般に，任意の**非自明な束**（2個以上の要素をもつ束）L において，任意の要素 a に対し

$$J(a) = \{x \in L \mid x \leq a\}$$

は L のイデアルである．これを（a で生成された）**主イデアル**または**単項イデアル**という．有限束では，イデアルはすべて主イデアルである．

例 1　ω は自然数全体の集合であった．ω の部分集合全体の集合 $\mathfrak{P}(\omega)$ は，包含関係 $\subseteq$ に関して束をなす．これはよく知られているように，いわゆるブール代数の典型的な一例である．（ブール代数はすぐ後で定義する．）

$$J = \{x \subseteq \omega \mid x \text{は有限集合}\}$$

とすれば，J は**非主イデアル**である（空集合も有限集合である！）．J がイデアルであることは明白．そして，ω の**最大の**有限部分集合というものは存在しないから，J は主イデアルでない．□

さて，L のイデアル J に対し，$J \subsetneq J' \subsetneq L$ なるイデアル J' が存在しないならば，J を**極大イデアル**という．

例 2　例1の束 $\mathfrak{P}(\omega)$ で，$\omega-\{0\}$ によって生成される主イデアル $J_0 = \{x \mid x \subseteq \omega-\{0\}\} = \{x \subseteq \omega \mid 0 \notin x\}$ は極大イデアルである．このようなイデアルは，ω 上の，あるいは $\mathfrak{P}(\omega)$ の**自明な**極大イデアルとよばれる．ブール代数 $\mathfrak{P}(\omega)$ は非自明な極大イデアルをもつであろうか？　□

定理 18.3（束の極大イデアル定理）　最大元をもつ非自明な束は極大イデアルをもつ．

*　**証明**　L を，最大元 I をもつ非自明な束とする．L が有限集合なら，極大イデアルの存在は明白である．したがって，L が無限束の場合が本質的で，そこに選択公理のお出ましを願うわけがある．さて，L の本来のイデアル全体の族を $\mathscr{F}$ とする．仮定により $\mathscr{F} \neq \phi$．$\mathscr{F}$ は包含関係 $\subseteq$ に関し順序集合をなし，その任意の鎖は上界をもつ．［なぜなら，C を $\mathscr{F}$ の鎖とすると，C のどのメンバーも本来のイデアルであるから，それらは L の最大元 I を含んでいない．よって，C の全メンバーの和集合 J も I を含んでいない．J が L のイ

デアルであることは容易にわかるから，J は本来のイデアルである．この J は C の上界である．]

♯　よって，ツォルンの補題が適用できて，$\mathscr{F}$ は極大元をもつことになる．こ
⁑ の極大元は L の極大イデアルである．□

この定理の出自はわからないが，すでに1930年にタルスキー [51] は**集合代数**（一つの集合の部分集合たちの族で，その集合自身を含み，集合和演算と補演算のもとで閉じたもの）について，外見上より強い形で，対応する結果を得ている．これをブール代数について述べよう．**ブール代数**とは，最大元 I と最小元 O をもつ束で，その演算 $\cup$, $\cap$ が**分配法則**

$$a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c),\qquad a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$$

をみたし，任意の元 a に対し

$$a\cup a'=I,\qquad a\cap a'=O$$

をみたす a' が存在するという条件をみたすものである．a に対し a' は一意的に定まり，それを a の**補元**という．

一般に，束のイデアル J が次の条件

(1)　$$a\cap b\in J\implies a\in J\vee b\in J$$

をみたすならば，J は**素イデアル**であるという．したがって，もし J がブール代数 B の素イデアルならば

(2)　$$\forall a\in B[a\in J\vee a'\in J]$$

が成り立つ．したがって，J は極大イデアルである．逆に，J が極大イデアルなら (2) が成立し，したがって (1) が成立するから，J は素イデアルである．これらの推論は容易に確かめられる．したがって，ブール代数においては，素イデアルと極大イデアルとは一致する．

定理 18.4（**ブール代数の素イデアル定理**，ストーン [64]）　ブール代数は素イデアルをもつ．――BPI で表す．

*　**証明**　ブール代数は最大元をもつ非自明な束であるから，定理 18.3 により極
♯ 大イデアルが存在する．その証明にはツォルンの補題が使用された．上記注意

** により，極大イデアルは素イデアルだから，定理は証明された．□

前述の集合代数は明らかにブール代数である．その特別な場合：一つの集合 A の部分集合全体 $\mathfrak{P}(A)$ がなす集合代数では，いつも自明な極大イデアルがあり（例 2 を参照），したがって**この場合は**選択公理なしに定理 18.4 が成立する．だから，$\mathfrak{P}(A)$ の場合は次の形の命題が重要で，応用されるのもこの形としてである：

定理 18.5（タルスキー）　集合代数の本来のイデアルは素イデアルに拡張される．

タルスキー［51］は，与えられた集合上の有限加法的 2 値測度（値として 0, 1 のみをとる測度）の存在に関係して，上の定理を証明した．もちろんその時代は集合代数という言葉や集合上のイデアルという用語も使われていなかったようで，タルスキーはていねいな記述をしている．それはさておき，集合代数はブール代数であるから，むしろ

定理 18.6　ブール代数の本来のイデアルは素イデアルに拡張される．

を証明する方がよい．ここに定理 18.5 をわざわざ掲げた理由は筆者の個人的体験による．1969 年 10 月，東京で第 1 回日米合同数理論理学セミナーが開催された．この分野のリーダーや若手の俊英たち――タケウチ（竹内外史），ヴォート，チャン，サックス，キースラー，バーワィズ，等――が来日し，たいへん有意義なセミナーであった．このセミナーでタルスキーの弟子[1]キースラーは

1/　タルスキーはポーランド人で，ワルシャワ大学教授であったが 1939 年に追放され，学術救援会議緊急委員会の援助により渡米することができた．しかし，最初はハーヴァード大学の助手という立場で，かなり苦労したようである．カリフォルニア大学バークレー校の教授になったのは 1946 年のことである．彼はそこで数理論理学の強力な学派を形成し，学会をリードした．タルスキーのもとで 20 名以上の博士が誕生した．1960 年代の中ごろ一度来日したことがある．その際，よく「My Doctor 誰々」ということを口にした．彼の Doctor 第 1 号はワルシャワ大学で与えたのであるが，それは有名なモストウスキーであった．他に，ヒルベルトの第 10 問題に重要な貢献をした故マダム・ジュリア・ロビンソン，前述のヴォート，チャン，最近自然言語研究の分野で注目されているモンタギュ文法の創始者モンタギュ（彼は悲劇的な死をとげた），フィファマン，ガイフマンと多士済々である．このキースラーはモデル理論の大家であり，最近は超準解析の方面で有名である．

モデル理論の講演を行なったが，その冒頭で定理 18.5 を（双対概念のフィルターを用いる表現で）述べた．その際タルスキーの名前をしっかりと引用し，「私の師タルスキーに負うものである」と強調したのが，筆者にはたいへん印象的であったのである．当時，日本では自分の師の業績をそれほど強調はしなかったと思う．“自分の恩師のことを宣伝するのは少しはばかるが ……”というような考えさえあった．その後しばらくして，アメリカに滞在中，筆者はまたも同じような光景に出合った．ミルウォーキーの Recursion Theory のシンポジウムのことであった．クリーネは帰納的関数の理論 —— それは数理論理学のみならずコンピュータ・サイエンスでも重要な役割を果たし，今日では非常にポピュラーなものとなった —— の開拓者として有名である．そのクリーネの弟子モシュコヴァキスがこのシンポジウムで講演したとき，師の一定理（ススリン-クリーネの定理）を引用して，“very, very elegance”と言った．very を強くしかも重ねて言ったことが特に印象に残っている．—— そんなわけで，数学とは直接関係のないいきさつから，定理 18.5 をここに書こうと思ったのである．しかし，それは無意味ではなかった！　それは実は素イデアル定理と同値なのである．さらにまた，定理の直後に述べたように，測度問題に深く係わっているので，それについて次節で述べることにする．

話が少しそれてしまった．証明は次のとおり：

*　**定理 18.6 の証明**　J_0 をブール代数 B の本来のイデアルとする．$a, b \in B$ に対し

$$a \oplus b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$$

を，a と b の**対称差**という．いわゆる**排他和**として論理回路論でよく知られている演算である．

$$a \sim b \iff a \oplus b \in J_0$$

によって関係 $\sim$ を定義すると，容易にわかるように $\sim$ は同値関係である．B の J_0 による**商代数**

$$B/J_0 = \{[a] \mid a \in B\}$$

は，$[a] \overset{\vee}{\wedge} [b] = [a \overset{\vee}{\wedge} b]$，$[a]' = [a']$ なる演算によってブール代数になる．

ただし，

$$[a] = \{b \in B \mid a \sim b\}$$

♯ は a の**同値類**を表す．ゆえに，素イデアル定理によって，B/J_0 は素イデアル J_1 をもつ．このとき

$$J = \{a \in B \mid [a] \in J_1\}$$

⁑ とすれば，J は J_0 を含む（B の）素イデアルである．□

実は「任意のブール代数はある集合代数と同型である」という有名な**ストー
♯ ンの表現定理**［64］がある（たとえば［10］）．証明には選択公理を必要とするが，これによれば集合代数とブール代数を区別する必要はないわけである．しかし，1930年ごろは未だこの定理は知られていなかった．後，素イデアル定理，定理18.5と18.6，コンパクト性定理（後述），ストーンの表現定理などは互いに同値であることがわかった．

さて，例2における疑問に答えよう．すなわち:

定理 18.7　無限集合 A に対し，集合代数 $\mathfrak{P}(A)$ は非自明極大イデアルをもつ．

* **証明**　$J_0 = \{Y \subseteq A \mid Y$ は有限集合$\}$ とする．J_0 は本来のイデアルであるか
♯ ら，定理18.5により J_0 を含む素イデアル J が存在する．J は非自明である．なぜなら，もし J が自明なら

$$J = \{Y \mid Y \subseteq A - \{a\}\}$$

なる $a \in A$ がある．よって，

$$\{a\} \in J_0 \subseteq J, \qquad \therefore \quad \{a\} \subseteq A - \{a\}.$$

⁑ これは不合理．ゆえに，J は求める非自明素イデアルである．□

（この定理は定理18.5より**真に弱い**ことが知られているので，**極大イデアルの弱定理**とよぶことにする．）

次に，より代数学らしい問題を二つ述べて，本節をしめくくることにしよう．序章で述べたものを取り上げよう．**体**とは，いわゆる四則算法が（そのよく知られた法則と共に）定義されている代数系である．Ω が体 K の**代数的閉包**であるというのは，Ω が K の代数拡大で（すなわち，Ω の任意の要素 α が K

の要素を係数とするある多項式の根であり）かつ代数的閉体となっていること（すなわち，Ω の要素を係数とする不定元 X の多項式全体 $\Omega[X]$ において，定数でない任意の多項式が $\Omega[X]$ の1次式の積に因数分解されること）である．次の定理は，今世紀初期の抽象代数学の発祥をつげるものと言える仕事の中の一結果で，その開拓者シュタイニッツによる有名な定理である．

定理 18.8　任意の体に対し，その代数的閉包が一意的に存在する．

この定理の証明は多少スペースを必要とするので，残念ながら割愛することにする．与えられた体 K が可算集合ならば，K の代数的閉包 Ω の存在は選択公理なしに証明することができる．しかしこの場合でも，Ω の一意性の証明に
♯ は選択公理を必要とする．K が一般の無限集合の場合には，Ω の存在証明にも
♯ 選択公理が必要となる．この間の事情は，文献［19; pp. 254−259］に詳述されているので，それを参照願いたい．

選択公理によって証明される初等的な結果として，もう一つ有名なものがある．それはアルティン－シュライアーの定理である．F が**実体**であるとは，任意の正整数 n と任意の要素 $x_i \in F$（$i=1,2,\cdots,n$）について，常に

(3)　　$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2=0 \implies x_1=x_2=\cdots=x_n=0$

が成り立つ体のことである．この条件は，容易にわかるように，任意の正整数 n と任意の $x_i \in F$（$i=1,2,\cdots,n$）について

(3′)　　$-1 \neq x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2$

が成り立つことと同値である．

$\langle F, < \rangle$ が**順序体**とは，$<$ が F の線形順序で，条件

(4)　　$\begin{cases} a<b \implies a+c<b+c \\ a<b,\ 0<c \implies a\cdot c<b\cdot c \end{cases}$

がみたされるもののことである．これから

$$a<b \iff 0<b-a, \qquad a<b \implies -b<-a,$$

(5)　　$0<a<b \implies 0<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$

が得られる．

体 F の任意の要素 a に対し

(6)　　$0 < a, \quad a = 0, \quad 0 < -a$

のうちどれか一つだけが成り立つような関係 $<$ が定義されていて，条件

(7)　　$0 < a,\ 0 < b \implies 0 < a+b,\ 0 < a \cdot b$

が成立するならば，$\langle F, < \rangle$ は順序体である（たとえば［19; p. 274］）．

定理 18.9（アルティン-シュライアーの定理） 実体は順序体である．すなわち，F が実体ならば，F 上に線形順序 $<$ を定義して $\langle F, < \rangle$ が順序体となるようにすることができる．

文献［19; p. 301］は，この定理を実閉な代数拡大体の存在から導いた．選択公理を必要とする結果であるが，実はそれより**真に弱い**コンパクト性定理から導くことができる．

第1階述語論理については，付録を参照していただきたい．モデルのこともそこに述べられている．

定理 18.10（コンパクト性定理） Σ を，第1階の述語論理の言語における閉論理式からなる一つの集合とする．もし Σ の任意の有限部分集合がモデルをもてば，Σ 自身モデルをもつ．（補遺 VI を参照）

証明は，通常，いわゆるゲーデル-ヘンキンの完全性定理の系として導く方
♯ 法をとる．濃度に制限のない完全性定理は選択公理を必要とする．よって，コンパクト性定理は選択公理からの帰結である．タルスキーの定理（18.5）の双対形（超フィルターによる記述版）からコンパクト性定理を導く方法は，前述の日米シンポジウムの際，キースラーから学んだ．これは［9］の訳者解説の§2に述べてあるので，それを参照されたい．［9］の本文の第3章には通常の証明が載っている．

さて，体 F において，F の“非負”の部分 P がきまるならば，

(8)　　$a - b \in P \wedge a \neq b$　のとき　$b < a$

と定義すると，$\langle F, < \rangle$ が順序体となる．P に対し要請される条件は，

（a）$P+P \subseteq P$　　（b）$P \cdot P \subseteq P$

（c）$P \cap -P = \{0\}$　　（d）$P \cup -P = F$

である．ここに，当然 $P \dot{+} P = \{x \dot{+} y \mid x, y \in P\}$，$-P = \{-x \mid x \in P\}$ である．(a), (b) は (7) を表している．(c) は (6) で述べた内容を表している．(d) は (8) で定義した $<$ が線形順序であることを含意する．なぜなら，$a \neq b$ のとき，$a-b \in P$ なら $b < a$ としたのであった．よって $b \not< a$ なら (d) により $a-b \in -P$，したがって $b-a = -(a-b) \in -(-P) = P$．ゆえに $a < b$．

*　**定理 18.9 の証明**[1/]　F を実体とする．

\#　（i）**整列定理を直接利用する証明．** 整列定理により，F を整列して

$$F = \{a_\xi \mid \xi < \alpha\}$$

とする．α はある順序数である（基数 $\overline{\overline{F}}$ を表す順序数——すなわち始数——としてよい）．超限帰納法によって P_η ($\eta \in \mathrm{OR}$) を定義し，それらが上記 (a), (b), (c) および

（e）$b \in P_\eta \wedge b \neq 0 \implies b^{-1} \in P_\eta$

をみたすようにする．まず，

$$P_0 = \{a_{\xi_1}{}^2 + \cdots + a_{\xi_n}{}^2 \mid \xi_1, \cdots, \xi_n < \alpha,\ 0 < n < \omega\}$$

とする．容易にわかるように，P_0 は (a), (b), (c) をみたす（(c) は (3) による）．(e) を示すために，$b \in P_0$, $b \neq 0$ としよう．すると，$b = a_{\xi_1}{}^2 + \cdots + a_{\xi_n}{}^2$ と書ける．両辺へ $(b^{-1})^2$ を掛けることによって

$$b^{-1} = (a_{\xi_1} b^{-1})^2 + \cdots + (a_{\xi_n} b^{-1})^2 \in P_0.$$

帰納法の仮定として，$\eta < \nu \in \mathrm{OR}$ なる η に対し P_η が定義され，(a), (b), (c) および (e) がみたされるとする．このとき $Q = \bigcup\{P_\eta \mid \eta < \nu\}$ が (a), (b), (c) および (e) をみたすことは明らかである．

場合 1）Q が条件 (d) をみたすとき．$P_\nu = Q$ とする．

場合 2）Q が条件 (d) を満足しないとき．$a_\xi \in F - (Q \cup -Q)$ なる最小番号の a_ξ をとり，

1/　以下の証明は，あるセミナーにおける塚田信高氏の講演による．

$$P_\nu = Q + a_\xi Q$$

と定める．P_ν は所要の条件をみたす．

［証明：(a) は明らか．(b) は $a_\xi{}^2 QQ \subseteq P_0 Q \subseteq QQ \subseteq Q$ からすぐわかる．(c) は，$x \in P_\nu \cap -P_\nu$ としよう．すると，$x = p + a_\xi q = -(p' + a_\xi q')$ と表せる．ここに $p, p', q, q' \in Q$ である．これより $(p+p') + a_\xi(q+q') = 0$．もし $q+q' \neq 0$ なら ($q+q' \in Q$ だから)，$(q+q')^{-1} \in Q$．ゆえに $a_\xi = -(p+p') \cdot (q+q')^{-1} \in -QQ \subseteq -Q$．これは a_ξ の選び方に反する．よって $q+q' = 0$，したがって $p+p' = 0$．これらから Q の性質 (c) により $p = q = 0$ が得られ，結局 $x = 0$ となる．ゆえに，$P_\nu \cap -P_\nu = \{0\}$．(e) は，$x = p + a_\xi q \neq 0$ としよう．$x^{-1} = p(x^{-1})^2 + a_\xi q(x^{-1})^2 \in QQ^2 + a_\xi QQ^2 \subseteq Q + a_\xi Q$．］

以上で，構成を終わる．

$$P = \bigcup\{P_\nu \mid \nu \in \mathrm{OR}\}$$

とすれば，上の証明から P が (a), (b), (c), (e) をみたすことがわかる．超限帰納法は場合 2) が起こらなくなるまで続けられるから，P ではもはや $F - (P \cup -P) \neq \phi$ なる現象は生じない．ゆえに，(d) も成立する．

この P によって F へ順序が導入され，F は順序体となる．

(ii) **コンパクト性定理のみを用いるよりよい証明．** $\mathscr{L}$ は，各 $a \in F$ に対する定数記号 $\underline{a}$，関数記号 $+$ と $\cdot$，1 項述語記号 P をもつ等号つき第 1 階の言語とする (P は上記の非負部分 P を意図しているものである)．$\mathscr{L}$ の理論 T は，次の公理からなるものとする：

1) 体の公理，

2) 記号 P を含まない原始論理式 φ で

$$\langle F, +, \cdot, \{\underline{a} \mid a \in F\}\rangle \models \varphi$$

となるもの (記号 $\models$ は §26 参照)，

3) 同様に

$$\langle F, +, \cdot, \{\underline{a} \mid a \in F\}\rangle \models \neg\varphi$$

となる $\neg\varphi$ (実はこの条件 3) は省いてよいことがわかっている)，

4) P についての (a), (b), (c), (d)，すなわち

（a）　$\forall x\, \forall y\, [\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(y) \rightarrow \mathrm{P}(x+y)]$,

（b）　$\forall x\, \forall y\, [\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(y) \rightarrow \mathrm{P}(x \cdot y)]$,

（c）　$\forall x\, [\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(-x) \rightarrow x=0]$,

（d）　$\forall x\, [\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{P}(-x)]$.

もし T がモデルをもてば，それを

$$\mathscr{M} = \langle \tilde{F}, \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \{\underline{a} \mid a \in F\}, \tilde{P} \rangle$$

としよう．一般性を失うことなく，$F \subseteq \tilde{F}$ としてよい．これに対し，

$$\langle F, +, \cdot, \{\underline{a} \mid a \in F\}, F \cap \tilde{P} \rangle$$

はやはり T のモデルとなる．そのとき，F は $F \cap \tilde{P}$ をその非負部分として順序体となる（公理 4）による）．ゆえに，T がモデルをもつことを示せばよい．

そこで，T の任意の有限部分集合 T_0 をとる．この中に現れる定数記号は有限個であるから，それらを

$$\underline{a_1},\ \underline{a_2},\ \cdots,\ \underline{a_n}$$

としよう．F の要素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ で生成される F の部分体を F_0 とすると，F_0 は可算な実体である．可算であるから F_0 の要素は並べられる，したがって整列定理なしに（i）の証明を実行することができ，この結果，F_0 を順序体にすることができる．F_0 の非負部分を P^* としよう．このとき $\langle F_0, +, \cdot, \underline{a_1}, \underline{a_2}, \cdots, \underline{a_n}, P^* \rangle$ は上記の有限部分集合 T_0 のモデルとなる．

このようにして，T の任意の有限部分集合がモデルをもつことがわかった．ゆえに，コンパクト性定理により，T はモデルをもつ．よって上述の議論から，F を順序体にすることができる．□

上記のような古典的代数学において，選択公理やツォルンの補題はかなりの頻度で出現する．環論では極大イデアルを使用する．ガロア理論のいくつかの結果は，代数的閉包の存在定理に依存している．群論でもツォルンの補題は有用である．一例をあげると「極大条件をみたす群の部分群はすべて有限生成である」([8; p. 40])．このように，代数学においても選択公理はなくてはならないものである，と言っても過言ではないであろう．

§19　第3章の結び

いままで見てきたように，数学の興味ある定理のうちかなり多くのものが選択公理に依存していることがわかった．だから，もし選択公理を許さないということになったら，数学はずいぶん淋しいものになるであろう．現在のところ，数学では選択公理はほとんど自由に使われているように思う．ほとんど後ろめたさなしに使用されていると思う．しかし選択公理からは，我々の直観とちょっとかけ離れた帰結がもたらされる．その典型的な例が，ハウスドルフの逆理およびバナッハ－タルスキーの逆理とよばれている定理である[1]．

すでに§13で，ルベーグの測度問題について述べた．そこの完全加法性の条件（iii）を，それより弱い**有限加法性**

(iii′)　$A \cap B = \phi \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

でおきかえた場合を，**有限加法的測度問題**とよぶことにしよう．ハウスドルフ［36; p.469］は，この有限加法的測度問題も2次元球面 K 上で解をもたないこと――すなわち，K 上では（i），（ii），（iii′）をみたす μ が存在しないこと――を証明した．彼は言う：

> 「球面 K のすべての点集合 A に，（i），（ii），（iii′）をみたす測度（Inhalt）$\mu(A)$ を対応づけることは不可能であることを示す．証明は，球面 K の 1/2 と 1/3 とが合同でありうる，換言すれば（可算集合を度外視して）K を三つの集合 A, B, C に分割し，その各々が $B \cup C$ と合同であるようにすることができるという奇妙な事実に基づいている．可算集合はとにかく測度が0でなければならない．なぜなら ……」

このような集合 A については性質（ii）によって $\mu(A) = \dfrac{1}{2}\mu(K) = \dfrac{1}{3}\mu(K)$ が得られるから（i）と矛盾し，したがってこのような μ は存在しないわけである．この結果も選択公理によって得られたものである．測度の問題は別にして，上記**ハウスドルフの分割**は，我々がもっている直観的な合同変換（2点間

1/　“逆理”と名づけられてはいるが，ブラリ・フォルティの逆理やラッセルの逆理とは性格が異なる．後の二者は矛盾であるが，前者はそうでない．

の距離を変えない変換——球面上では回転変換）の概念からはちょっと信じられない奇妙なものである．ハウスドルフの逆理とよばれる由縁である．それが選択公理からの帰結なのだから，選択公理というものはにわかには信じ難いものだと考えざるをえない．

定理 19.1（ハウスドルフの逆理）　2次元球面 K を三つの部分集合 A, B, C に分割して，A, B, C および $B \cup C$ が互いに合同となるようにすることができる．

*　**証明大要**　φ を一つの軸のまわりの $180°$ の回転，ψ をこれと異なる軸のまわりの $120°$ の回転とする．φ, ψ, ψ^2 によって生成された回転群 G を考える．その要素は

（1）　$$1 | \varphi, \psi, \psi^2 | \varphi\psi, \varphi\psi^2, \psi\varphi, \psi^2\varphi | \cdots\cdots$$

のように表すことができる．回転軸を適当に選んで，

$$\varphi^2 = \psi^3 = 1 \qquad (1 \text{は恒等変換})$$

以外に φ と ψ の間に関係がないようにできる．このことはこの議論の核心だからと言って，彼はその詳細な証明を述べている．ここではこの部分は承認して省略することにしよう．このことから，(1) に記した形の表現

（2）　$$\varphi^k \psi^{i_1} \varphi \psi^{i_2} \varphi \cdots \psi^{i_{n-2}} \varphi \psi^{i_{n-1}} \varphi^l$$
$$(k, l = 0, 1;\ i_1, \cdots, i_{n-1} = 1, 2;\ n \geq 1)$$

は，形式的式が異なれば実際に異なる要素であることがわかる．(2) は球面の回転であるから，1 以外のものの不動点は2個，したがって G による不動点全体の集合 Q は可算集合である．

さて (1) を，（ρ を G の任意の要素として）$\rho, \rho\varphi$ のうちの一方を A に，他方を $B \cup C$ に；$\rho, \rho\psi, \rho\psi^2$ を適当に A_0, B_0, C_0 に配分するようにして，三つのクラス A_0, B_0, C_0 に分割する．まず，$1 \in A_0, \varphi \in B_0, \psi \in B_0, \psi^2 \in C_0$ とする．(2) の生成元の個数が n 個のとき上記の割り当てができたと仮定する．ρ を n 個の因子の積とするとき，$n+1$ 個の積について：

（イ）　ρ が ψ または ψ^2 で終わるときの $\rho\varphi$．　ρ が A_0, B_0, C_0 のどれに属

するかに従って，$\rho\varphi$ をそれぞれ B_0, A_0, A_0 に割り当てる.

（ロ） ρ が φ で終わるときの $\rho\psi$. ρ がクラス A_0, B_0, C_0 のどれに属するかに従って，$\rho\psi$ をそれぞれ B_0, C_0, A_0 に割り当てる.

（ハ） ρ が φ で終わるときの $\rho\psi^2$. ρ がクラス A_0, B_0, C_0 のどれに属するかに従って，$\rho\psi^2$ をそれぞれ C_0, A_0, B_0 に割り当てる.

これを表にすると，次のようになる.

A_0 : 1		$\psi\varphi, \psi^2\varphi, \varphi\psi^2$	$\varphi\psi\varphi$	$\cdots$
B_0 :	φ, ψ		$\varphi\psi^2\varphi, \psi\varphi\psi, \psi^2\varphi\psi$	$\cdots$
C_0 :	ψ^2	$\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi^2, \psi^2\varphi\psi^2$	$\cdots$

さて，$P = K - Q$ とおく. P の各点は $G - \{1\}$ の要素によって異なる点に移る. そこで

$$P_x = \{x\rho \mid \rho \in G\} \qquad (x \in P)$$

と定義すれば，$x, y \in P$ に対し

$$P_x = P_y \ \vee \ P_x \cap P_y = \phi$$

なること，すなわち P_x たちは P の分割であることが容易にわかる. そこで選
択公理により，各 P_x から一点ずつ選んで，$\{P_x \mid x \in P\}$ の選択集合 M を作る. このとき

$$P = \bigcup\{M\rho \mid \rho \in G\}$$

であるから，G の分割 $G = A_0 \cup B_0 \cup C_0$ を使って P を次のように分割できる:

$$P = A \cup B \cup C$$

ここに，

$$A = MA_0 = M \cup M\psi\varphi \cup M\psi^2\varphi \cup M\varphi\psi^2 \cup \cdots$$

$$B = MB_0 = M\varphi \cup M\psi \cup M\varphi\psi^2\varphi \cup \cdots$$

$$C = MC_0 = M\psi^2 \cup M\varphi\psi \cup \cdots$$

ここで，ちょうど

$$A\varphi = B \cup C, \qquad A\psi = B, \qquad A\psi^2 = C$$

⁑ となる. ゆえに，$A, B, C, B \cup C$ は互いに合同である. □

途中で少し細部を省略したが，ハウスドルフの論法は理解していただけたと思う. そして，上の証明は，ルベーグ測度の意味で非可測な集合が存在するこ

との証明と類似な論法によっていることに気づかれたと思う．

有限加法的測度問題としては，合同条件（ii）をはずし，代わりに

（ii′）　各1-要素集合に対する測度は0，すなわち $\mu(\{x\})=0$.

を使い，μ の値を0と1だけに制限すれば――**2値測度**という――解があるのである．それは前節に述べたタルスキーの定理からの直接結果であり，事実タルスキーの目的はこの測度問題にあったのである．

定理 19.2（タルスキー）　任意の無限集合 S に対し，条件（i），（ii′），（iii′）をみたす2値測度 μ が存在する．

証明　J_0 を S の有限部分集合全体のなすイデアルとする．定理18.5により，J_0 を含む素イデアル J が存在する．$A\subseteq S$ に対し

$$\mu(A)=\begin{cases}0 & (A\in J\text{ のとき})\\ 1 & (\text{それ以外のとき})\end{cases}$$

とすれば，μ は $\mathfrak{P}(A)$ で定義された2値関数で，$\mu(S)=1$, $\mu(\{x\})=0$ （$x\in S$）をみたす有限加法的測度である．（iii′）の証明：$A, B\subseteq S$，$A\cap B=\phi$ とする．J は素イデアルだから，$A\notin J$ かつ $B\notin J$ ということはない．よって，$A, B\in J$, $A\in J\wedge B\notin J$, $A\notin J\wedge B\in J$ という三つの場合をチェックすればよい．□

なお，（i），（ii′），（iii）（プライム ′ の位置に注意――この場合は（iii）がプライムなしだから，完全加法性が要請されている）をみたす2値測度の存在は巨大基数（いわゆる**可測基数**（たとえば［15; p.133］））の存在を含意し，ZF＋AC では証明できないことが知られている．

さて，ハウスドルフの後約10年を経て，バナッハ［23］は，**直線** $\mathscr{R}^1$ および**平面** $\mathscr{R}^2$ では（i），（ii），（iii′）をみたす（すべての部分集合に対し定義された）測度がそれぞれ**存在する**ことを証明した．このときも選択公理がその職責を果たした．ところが，バナッハとタルスキー［25］はその翌年，3次元ユークリッド空間 $\mathscr{R}^3$ ではこのような測度がないことを証明した．その証明のカギとなったのは，ハウスドルフのときと同様に逆理的な，次の結果である：

定理 19.3（バナッハ-タルスキーの逆理） 3次元ユークリッド空間 $\mathscr{R}^3$ において，A, B は内点をもつ任意の有界集合であるとする．このとき，A, B を適当な同数個

$$(3)\qquad \begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \\ B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m \end{cases}$$

に分割し，各 A_i と B_i $(1 \leq i \leq m)$ が合同であるようにできる．

この証明にもちろん選択公理が威力を発揮する[1]．逆理とよばれる由縁は明らかであろう．A, B はほとんどお好みにとれる．たとえば，A をすいか，B を地球としてみよう．これらを（3）のように適当に有限同数個に分割して，A_i と B_i が合同となるようにできるというのであるから，すいか A を A_i に切り離し，それらを適当に貼り合わせると，あら不思議！ 地球が一丁でき上がりとなる．これはまさにマジックである！ こんなことが選択公理から証明できてしまうなんて，選択公理は矛盾をひき起こす命題ではないだろうか？

そこで，いよいよゲーデル大先生の登場と相なる．いままで見てきたように，数学の興味ある結果のうち，かなり多くのものが選択公理に依存していることがわかった．そして現在のところ，数学では選択公理はほとんど自由に使われている．特に，可算選択公理は無意識に使われていることさえある．そこで次の問題は，選択公理は大丈夫だろうかということ，すなわち矛盾を導くことはないであろうかということである．前述の二つの定理は，このような心配を最もよく裏書きしているものの例と言えよう．

このような危惧を最初に解消したのはゲーデルである．彼は「ツェルメロ-フレンケルの集合論公理系 ZF が矛盾を含まなければ，ZF に選択公理 AC をつけ加えた公理系 ZF + AC も矛盾を含まない」ことを証明した．このことを**選択公理の無矛盾性**とよぶことにしよう．（ZF の無矛盾性を仮定しての AC の無矛盾性なので，正確には**相対無矛盾性**というべきところであるが，ZF の無

1/ バナッハ-タルスキーの逆理については（ハウスドルフのものも含めて）詳しい解説が証明つきで［11］に載っているので，それを参照されたい．たいへんよい論説であると思う．詳細な研究は［56］を参照．

矛盾性を疑っている人は今日まずいないと言えるし，またその証明はある意味で不可能であるから，それはたな上げしておいて，選択公理のみに注目して上のようにいうのである．連続体仮説，その他の公理の無矛盾性（あるいは独立性）についても，同様な言い方を用いる．）これによって，我々は選択公理使用のお墨付きをちょうだいすることができたわけで，たいへんありがたいことであった．実は，ゲーデルはもっと強い定理を得たのである．構成可能性公理の無矛盾性がそれで，この公理から選択公理と一般連続体仮説を導いたのであった．

クルト・ゲーデルは，1930年代の初頭，述語論理の完全性と，非常に一般的な形式的体系の不完全性定理を証明して，学界に大きな衝撃を与えた天才である．彼は1906年に当時のオーストリア・ハンガリー帝国のブリュンという市で生まれた．その前後のハンガリーは，特に科学的才能に秀いでた偉才たちを多数輩出させた国であった．たとえば，原子物理学者のシラード，ノーベル物理学賞受賞者ウィグナー，数学者フォン・ノイマン等々．ゲーデルもそういう輝かしい才能の持主の一人であった．彼は上記の業績でアメリカのプリンストン高級研究所へ客員として招聘され，1933年から，所員（ordinary member）になった1940年までの間，何度かヨーロッパとアメリカの間を往来していた．（シベリア鉄道径由でアメリカへ渡ったときの中継地横浜に何日か滞在した．それは1940年の1月末から2月初めのことであったらしい．そのとき，平野智治氏（1897–1979）が会いに行ったという．

集合の分岐階層の構成によって選択公理の無矛盾性の証明がゲーデルの頭脳に初めて創りだされたのは1935年のことであった．ゲーデル全集第1巻［33］の中の記事によると，その年ゲーデルは構成的集合が作るモデルで ZF＋AC が成立することの証明に成功したとフォン・ノイマンに告げることができた，ということである．しかしその後，精神障害におち入りサナトリウムで療養生活を送ったため，一般連続体仮説の無矛盾性まで含めた証明を完成したのは，1937年の後半のことであった．この偉大な業績と，さらに四半世紀後1963年のポール・コーエンの画期的業績——連続体仮説と選択公理の独立性［29］——を，次章でかなり詳しく解説する．

第4章　選択公理の無矛盾性と独立性

本章では，選択公理の無矛盾性と独立性について相当詳しく述べる．なお，次の文献も参照されたい：[1]，[5]，[12]，[15]，[17]，[32]，[40]．

無矛盾性とか独立性を取り扱うには，集合論がどんな前提のもとで成り立っているのか，そのよってきたる根拠——公理——を明確にしておかなければならない．そこで，本章では最初に集合論の公理系のお話から始めよう．

§20　公理的集合論

カントルの集合論に矛盾が生じたことはすでに述べた．これは，議論が基づいているある前提になにかの欠陥があるに相違ない．それを見極め，矛盾が生じないようにするためには，まずもって集合論がよってきたるところの根拠を明確にしなければならない．

ツェルメロは，自分が証明した整列可能定理が選択公理に基づいたものであることもあって，集合論の基礎を固め，よって以って集合論をたて直そうと決心したに違いない．1908年に彼は，整列定理の第2証明［58］とほとんど時を同じくして，“集合論の基礎づけの研究”［59］を発表した．（前者は1907年7月14日付，後者は同年7月30日付となっている．不思議なことに——前者で三つの公理を掲げているにもかかわらず——両者の間に引用関係が見あたらない．）［59］において初めて集合論の公理系が世に現れた．今日ツェルメロの集合論とよばれるものがそれである．ここにその序文を見てみよう：

「集合論は，数，順序および関数という基本概念をその本来の単純さのま

まで数学的に研究し，それによってすべての算術や解析学の論理的基礎づけを展開するという任務を与えられた数学の分野である．だから，それは数理科学の欠くべからざる構成要素をなしている．さてしかし，この学問はまさに今ある矛盾あるいは“二律背反”によってその全存在がおびやかされているようにみえる．それは集合論の見たところ必然的に与えられたようにみえる原理から推論されたものであり，いままでのところ全般的に満足できる解決がまだ見出されていない．特に“それ自身を要素として含まないすべての集合の集合”についての“ラッセルの二律背反”に直面して，論理的に定義可能な任意の概念にその外延として“集合”または“クラス”という言葉を割り当てることは，今日もはや許されないようにみえる．したがって，“我々の直観または思考の定まったよく区別できる対象たちを一つの全体にまとめたもの”という“集合”に対するカントルのもともとの定義は，いずれにせよ，このような疑念が全く起こらないような別の同じ程度に単純なものによっておき換えられすでにうまくいっているのでなければ，ある制限を必要とする．この状況下では，逆の道をとって，この数学的学科の基礎づけに必要な原理を，歴史的に存立している“集合論”からぬけ出して探し選び出す以外にないであろう．この問題を解くには，一方ではすべての矛盾を排除するためにこれらの原理を一度十分せまく制限し，他方では同時にこの学問のあらゆる価値あるものをすべて維持するために十分広く広げるという方法をとらなければならない．

この論文で私は，カントルとデデキントによって創造された全理論が，いかにして若干の定義と7個の見かけ上たがいに独立な“原理”あるいは“公理”に還元させられるかを示すつもりである．これらの原理の根源や適応性の範囲についてのさらに進んだ非常に哲学的な問題が，なお討議されないままになっている．私の公理の疑いもなく非常に本質的な“無矛盾性”さえ，まだ厳密に証明できていない．むしろここに提案された原理を根底におくときは，いままでに知られている二律背反がすべて解消されるというだけの一時的な注意にとどめておかなければならないのである．

このようないっそう深く横たわっている問題にかかわる後の研究のために，私は少なくともある有用な予備的仕事を提供したいのである.」

我々も，ここで集合論の公理系を導入しよう．ツェルメロが作った公理系は弱いものであった．しばらくして（1921～1922）フレンケル［30］やスコーレム［50］は，ツェルメロの公理系は集合論を展開するのに十分でないと指摘し（分離公理の不十分性），その代案を示した．いわゆる置換公理がそれである．これで，今日の公理的集合論——いわゆるツェルメロ－フレンケルの集合論（ZF）——ができ上がった．一方，スコーレムもほとんど同時に独立に同じ内容を発表しており，しかも彼は第1階言語を用いる今日の形式を述べているので，ここは当然ツェルメロ－フレンケル－スコーレムの集合論とよぶべきところであろう．スコーレムの頭文字Sを付してZFS集合論と書く人もいるが，たいていはZFと書き，すっかりZFが定着してしまった．これはスコーレムにとってたいへん残念なことであろう[1/]．このような例はほかにもあるであろうが…….

ここでは今日の整理された形で述べるが，本質は彼らのものと変わっていない．少し準備が必要である．

次のようなシステムを**集合論言語**といい，$\mathscr{L}$ で表す.

（i） **記号系**

論理記号	$\to$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$	（意味は第1章§3参照）
限定作用素	$\forall$, $\exists$	
特異記号	(,)	（カッコ）
（個体）変数	$v_0, v_1, v_2, \cdots$ （無限個）	（個々の集合を表す変数）
等号	$=$	
2項述語記号	$\in$	（所属を表す）

（ii） **形成規則**（**論理式**の定義）

1） x, y が変数ならば，$x=y$ と $x\in y$ は論理式である．これらを**原子**

1/　よく調べてみると，置換公理の先発権はフレンケルにあるようである．フレンケルのこれに関する最初の論文は1921年夏に数学年報に受け付けられているのに対し，スコーレムの発表（スカンジナヴィア数学者会議での）は1922年夏のことであったから.

論理式という．

2)　φ と ψ が論理式ならば，$(\varphi)\to(\psi)$, $(\varphi)\wedge(\psi)$, $(\varphi)\vee(\psi)$, $\neg(\varphi)$ は論理式である．

3)　φ が論理式で x が変数ならば，$\forall x(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$ は論理式である——このとき，x は $\forall x(\varphi)$ または $\exists x(\varphi)$ において**束縛**されている，または**束縛変数**であるという．そうでない変数は**自由(変数)**であるという．

4)　以上によって与えられるものだけが論理式である．

ここで用いた x, y は $\mathscr{L}$ の記号を，φ, ψ は $\mathscr{L}$ の記号の有限列を任意に表すもので，**超記号**とよばれる．$\mathscr{L}$ **の**記号や記号列では**ない**．今後使用されるのはほとんど超記号である．また便宜上，適当にカッコを省略したり，$\mathscr{L}$ にないカッコ $[,]$, $\{,\}$ を使ったりする．これは，式を見やすくするための臨時的手段である．

例 1　$\mathrm{v}_0\in\mathrm{v}_2$, $\mathrm{v}_0=\mathrm{v}_1$, $\mathrm{v}_1\in\mathrm{v}_2$ は原子論理式である．したがって，$(\mathrm{v}_0\in\mathrm{v}_2)\wedge(\mathrm{v}_0=\mathrm{v}_1)$ は論理式である．したがって，

(1)　$$((\mathrm{v}_0\in\mathrm{v}_2)\wedge(\mathrm{v}_0=\mathrm{v}_1))\to(\mathrm{v}_1\in\mathrm{v}_2)$$

(2)　$$\forall\mathrm{v}_2(((\mathrm{v}_0\in\mathrm{v}_2)\wedge(\mathrm{v}_0=\mathrm{v}_1))\to(\mathrm{v}_1\in\mathrm{v}_2))$$

(3)　$$\forall\mathrm{v}_0\forall\mathrm{v}_1\forall\mathrm{v}_2(((\mathrm{v}_0\in\mathrm{v}_2)\wedge(\mathrm{v}_0=\mathrm{v}_1))\to(\mathrm{v}_1\in\mathrm{v}_2))$$

は論理式である．これらは $\mathscr{L}$ の記号列である．□

例 2　x, y, z が変数ならば，$x\in z$, $x=y$, $y\in z$ は論理式である．したがって，上の例のようにして

(4)　$$((x\in z)\wedge(x=y))\to(y\in z)$$

(5)　$$\forall z(((x\in z)\wedge(x=y))\to(y\in z))$$

(6)　$$\forall x\,\forall y\,\forall z(((x\in z)\wedge(x=y))\to(y\in z))$$

は論理式である．内容的には，x, y, z が変数を表すならば，(4), (5), (6) は論理式を表すということである．だから，x が v_0，y が v_1，z が v_2 なら，(4) は (1) と同じ論理式である．x が v_2，y が v_3，z が v_0 なら，(4) は (1) とは別な論理式であるわけである．(6) を略記すれば，

$$\forall x, y, z[(x\in z\wedge x=y)\to y\in z]\qquad \text{等.}\ \square$$

上の例で，(3)，(6) は変数がすべて束縛されている．このような論理式を，**閉論理式**または**文**という．(2)，(5) では，それぞれ v_0, v_1 および x, y が自由変数である．一つの論理式に現れるすべての自由変数を全称記号 ∀ で束縛したものを，その論理式の**全称閉包**という．たとえば，(3) と (6) はそれぞれ (1)，(2) および (4)，(5) の全称閉包である．

論理の公理は付録にゆずり，ここではまず等号公理を述べよう：

等号公理

(i)　$x = x$　　　　(反射法則)

(ii)　$x = y \rightarrow y = x$　　　　(対称法則)

(iii)　$x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$　　　　(推移法則)

(iv)　$\mathscr{L}$ の各論理式 φ について

$$x = y \rightarrow (\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)). \qquad \text{(代入法則)}$$

正確には，これらの全称閉包をとる．

上の (iv) で，$\varphi(y)$ は $\varphi(x)$ において x へ y を代入したもの (x を y でおき換えたもの) である．代入に際し変数の衝突を避けるように工夫する．たとえば

$$\varphi(x) \quad \text{が} \quad x \in z \wedge \exists y (y \in x)$$

であるとき[1/]，

$$\varphi(y) \quad \text{を} \quad y \in z \wedge \exists y (y \in y)$$

とすると意味が変わってしまう．これを避けるため，$\varphi(x)$ において $\exists y (y \in x)$ の部分を $\exists u (u \in x)$ と変えてから，x を y でおき換えるようにする．よって

$$\varphi(y) \quad \text{は} \quad y \in z \wedge \exists u (u \in y)$$

となる．このような束縛変数の書き換えは自由に許す．このことは日常の数学でしばしば行なわれている．たとえば $\sum_{i=1}^{6} a_i$ を $\sum_{k=1}^{6} a_k$ と書き換える類である[2/]．

1/　z は $\varphi(x)$ の中の x 以外の自由変数である．$\varphi(x)$ という記法は，$\varphi(x)$ に現れる全自由変数が x であることを意味し**ない**．

2/　実は，(iii) は (ii) と (iv) から導かれる．また，(iv) の形を少し一般化すると (ii) も不要となる．

さて，集合論の公理は次のとおりである．$\varphi \longleftrightarrow \psi$ は $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ の略記とする．

集合論の公理系

(Ⅰ)　外延公理　$\forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \to x = y$

(Ⅱ)　対公理　$\exists z\, \forall u(u \in z \longleftrightarrow u = x \vee u = y)$

(Ⅲ)　和集合公理　$\exists y\, \forall z[z \in y \longleftrightarrow \exists u(u \in x \wedge z \in u)]$

(Ⅳ)　ベキ集合公理　$\exists y\, \forall z(z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x)$

(Ⅴ)　空集合公理　$\exists x\, \forall y \neg(y \in x)$

(Ⅵ)　無限(集合)公理　$\exists x[\phi \in x \wedge \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)]$

(Ⅶ)　置換公理図式　$\mathscr{L}$ の v を含まない任意の論理式 $\varphi(x, y)$ について

$$\forall x\, \forall y\, \forall z[\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z]$$
$$\to \exists v\, \forall y[y \in v \longleftrightarrow \exists x(x \in u \wedge \varphi(x, y))]$$

(Ⅷ)　正則性公理　$x \neq \phi \to \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \phi)$

(Ⅸ)　選択公理　$\forall x \in u(x \neq \phi) \wedge \forall x, y \in u(x \neq y \to x \cap y = \phi)$

$$\to \exists v\, \forall x \in u\, \exists !\, t(t \in x \wedge t \in v).$$

公理は，正しくは上記の諸式の全称閉包である．たとえば (Ⅰ) は

$$\forall x\, \forall y[\forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \to x = y]$$

であり，(Ⅶ) では，u のみならず，$\varphi(x, y)$ が含む x, y 以外のすべての自由変数を $\forall$ で束縛するのである．たとえば，$\varphi(x, y)$ が $\mathscr{L}$ の**具体的に与えられた**一つの論理式で，それが含む全自由変数が x, y, s, t であるならば，

$$\forall u\, \forall s\, \forall t[\forall x\, \forall y\, \forall z(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z)$$
$$\to \exists v\, \forall y(y \in v \longleftrightarrow \exists x(x \in u \wedge \varphi(x, y)))]$$

は**一つの置換公理**である．このほかにも形式上定義してない記法を用いているので，公理の解説と共に説明しよう．

(Ⅰ)　これは，“二つの集合は，それらがちょうど同じ要素からなっているならば，相等しい”ことをいっている．逆向きの含意 $\leftarrow$ は等号公理から導かれる．したがって，外延公理は

$$\forall z(z\in x \longleftrightarrow z\in y) \longleftrightarrow x=y$$

と書いてもよい．

（II）対公理は，“与えられた集合 x, y に対し，ちょうど x と y だけからなる集合が存在する”ことをいっている．この集合（公理では z）は外延公理によって一意的に定まる．これを（x, y の）**対集合**といい，

$$\{x, y\}$$

で表す．特に，

$$\{x, x\} \quad \text{を} \quad \{x\}$$

で表し，**1-要素集合**という．定義から $\{x, y\}=\{y, x\}$ がわかる．ついでに，

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

を**順序対**という．

$$\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle \rightarrow x=u \wedge y=v$$

が成り立つ．

ここでは証明などを省略することが多い．詳細は，たとえば［15］を参照されたい．

（III）は“集合の集合 x が与えられると，それら各集合の要素をちょうど要素とするような集合 y が存在する”ことを主張する．y は x に対し一意的にきまる．これを x の**和集合**といい，

$$\bigcup x$$

で表す．特に $x=\{y, z\}$ のときは，

$$\bigcup x \ (=\bigcup\{y, z\}) \quad \text{を} \quad y\cup z$$

で表し，y と z の和（集合）という．

（IV）$z\subseteq x$ は $\forall u[u\in z \rightarrow u\in x]$ の略記である．このとき，z を x の部分集合という．したがって，ベキ集合公理は“x のすべての部分集合からなる集合 y が存在する”ことを意味する．x に対し一意的にきまるこの y を，x の**ベキ集合**といい，

$$\mathfrak{P}(x)$$

で表す．

（V）は“要素を含まない集合が存在する”ことをいっている．このような集合を**空集合**といい，

$$\phi \quad \text{または} \quad 0$$

で表す．したがって

$$\forall y\,(y \notin \phi)$$

これを ϕ の**定義式**という．ただし，$\neg(y \in x)$ を $y \notin x$ と書く．

（VI）の ϕ はいま定義した空集合である．$\{y\}$ もすでに定義された．無限公理は，

$$\phi,\ \phi \cup \{\phi\},\ \phi \cup \{\phi\} \cup \{\phi \cup \{\phi\}\},\ \cdots$$

を含む集合 x が存在することを主張する．… を使わないで“無限集合”を表しているところが大切である．

（VII）の中央の $\to$ の左側（$\to$ の**前提**という，右側をその**結論**という）は，$\varphi(x, y)$ が $F(x) = y$ のような**一価関数**を表していることを意味する．このとき結論は，任意の集合 u について，u の F による像 v が集合として存在することを意味する．あるいは“要素を集合サイズだけ集めたものは集合である”といってもよい．

ツェルメロは，前述のように，置換公理でなくそれより弱い次の公理を採用していた：

（VII′）　**分出**（または**分離**）**公理図式**　$\mathscr{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x)$（ただし，φ は v を自由変数として含まないとする）について

（7）　$$\exists v\, \forall x\, (x \in v \longleftrightarrow x \in u \wedge \varphi(x)).$$

もちろん，これの全称閉包をとらなければならない．

（7）は，“集合 u と論理式 φ が与えられたとき，$\varphi(x)$ が成り立つような u の要素 x たち全体が一つの集合 v を作る”ことを主張する．u に対し一意的にきまるこの v を，

（8）　$$v = \{x \in u \mid \varphi(x)\}$$

で表す．ここで，与えられた集合 u に制限しているところが大切である．カントル集合論では，制限なしに

（9）　$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

を集合と考えたため不合理が生じてしまった．$\varphi(x)$ として $x \notin x$ をとると，

$$v = \{x \mid x \notin x\}$$

が集合であるから，$v \in v$ かどうかを問うことができる．そこで $v \in v$ とすれば，定義により $v \notin v$ となるから，背理法により $v \notin v$．そうすると再び定義から，$v \in v$ でなければならない．ここに至って，真正な不合理が生じる．これがいわゆる“ラッセルの逆理”である．　注：p.239 の 3) を参照.

これに対し（7）は，与えられた φ から無制限に要素を集めて集合を作ることを許さず，あらかじめ与えられた集合からそのある部分集合を“分離する”のである．したがって，“自分自身を要素としてもたない集合の集まり”は u に相当するものがないから，集合として作りえないことになる．

ところで，先に少しふれたように，分出公理のままでは“大きい集合”の存在が保証されない．たとえば，

$$\omega = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \cdots\}$$

は自然数全体の集合であり，その存在は無限公理で存在が保証された集合を用いてちょっとした考察によって証明される．いま，

$$f(0) = \omega, \qquad f(n+1) = \mathfrak{P}(f(n)) \quad (n \in \omega)$$

とすれば，f は定義域が ω である一つの関数である．したがって，**置換公理によって** f の値域

$$\begin{aligned} \mathrm{rng}(f) &= \{f(0), f(1), f(2), \cdots\} \\ &= \{\omega, \mathfrak{P}(\omega), \mathfrak{P}^2(\omega), \cdots\} \end{aligned}$$

は**集合である**．ところが，置換公理を許さないツェルメロ集合論 Z（または，ZC）では，この可算集合の存在を証明することができない．このように，分出公理は力が弱いのである．フレンケルとスコーレムはほとんど同時に独立に，分出公理の弱さを指摘し，置換公理を提出した．置換公理はある意味でたいへん強力な一種の“無限公理”である．これにより“いくらでも大きい”集合を次々に作っていくことができるのである．

また，（VII）において $\varphi(x, y)$ として $\varphi(x) \wedge x = y$ を使うならば，（VII′）の（7）が導かれる．したがって，置換公理は分出公理を含んでいるわけである．

なお，(9) の形の集まりも集合論の対象として取り扱うとたいへん便利である．そこで，(9) の形の対象を**クラス**とよぶ．正確にいうと，論理式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ に現れる自由変数が $x, x_1, \cdots, x_n$ だけであるとき

(10)　　$$\{x : \varphi(x, x_1, \cdots, x_n)\}$$

を，φ によってパラメータ $x_1, \cdots, x_n$ から定義された**クラス**という．この場合 $x_1, \cdots, x_n$ はそれぞれある集合を表しているわけである．(10) は "$\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ が成り立つような x 全体を一まとめにしたもの" を表している．これを A で表せば，要素 x がクラス A に属する ($x \in A$) とは

$$x \in A \longleftrightarrow \varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$$

ということである．たとえば，$x \sim x_1$ を "x と x_1 は同等である (すなわち，x から x_1 の上への全単射がある" ことと定義するとき，クラス

$$\{x \mid x \sim x_1\}$$

は，$x_1 = \phi$ なら集合 $\{\phi\}$ であるが，$x_1 = \{\phi\}$ ならそれはすべての 1-要素集合からなるクラスである．後者は集合ではない．

しかし，「集合はクラスである」が成り立つ．なぜなら，u が集合ならば

$$\varphi(x, x_1) \equiv x \in x_1$$

ととれば ($\equiv$ は，左辺を右辺で定義することを表す)

$$u = \{x : \varphi(x, u)\}$$

である．よって，u はクラスである．また，(8) で与えられる集合 v は，いまの方式によらずに，

$$v = \{x : x \in u \wedge \varphi(x)\}$$

としてもクラスであることがわかる．

(VIII)　正則性公理は，"空でない集合は，それ自身と共通要素をもたないような要素を含む" ことを主張する．これは，$a = \{a\}$ のような集合 a とか，

$$b_0 = \{b_1\},\ b_1 = \{b_2\},\ b_2 = \{b_3\},\ \cdots$$

というような無限列 $\{b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots\}$ が存在しないようにするためのものである．このような集合があると，

$$\cdots \in a_2 \in a_1 \in a_0$$

という"底がない"集合があることになる．だから，(Ⅷ) は次のようにいってもよい：

(Ⅷ′)　∈-無限下降列

(11)
$$\cdots \in a_2 \in a_1 \in a_0$$

は存在しない．

公理 (Ⅷ′) を集合論へ取り入れるというアイデアは，最初フォン・ノイマンが考えだした．彼は22歳のとき発表した"集合論の公理化"という論文[54]の中で (Ⅷ′) の形の公理を導入し，後続の論文 [55] で (Ⅷ) の形の公理も提案した．ノイマンは集合概念とクラス概念の両方を含む公理系を考えたので(ツェルメロやフレンケル，スコーレムは集合のみを**対象**とする公理系である)，表現は本書で述べたものと違っているが，本質は同じである．なお，スコーレムはノイマンより先に，別の観点から∈-無限下降列に言及しているが，積極的に公理 (Ⅷ) や (Ⅷ′) を取り上げようとはしなかった([50])．

定理 20.1　(Ⅷ) と (Ⅷ′) は同値である．

*　**証明**　(Ⅷ) を仮定する．(Ⅷ′) が成立しないとすれば，それは (11) をみたす a_n を要素とする集合

$$b = \{a_n : n \in \omega\}$$

が存在することを意味する．この b の要素は，どれも b と共通要素をもつ．これは (Ⅷ) に反する．ゆえに，(Ⅷ′) が成り立たなければならない．

逆に，(Ⅷ′) を仮定する．(Ⅷ) が成立しないとすれば，

$$u \neq \phi \wedge \forall y\,[y \in u \rightarrow y \cap u \neq \phi]$$

なる集合 u がある．u が有限集合ならば

$$u = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$$

としよう．$a_0 = u$ とおく．仮定により，各 $k = 1, 2, \cdots, n$ に対し $b_{i_{k+1}} \in b_k \cap u$ なる i_{k+1} がある．$a_{k+1} = b_{i_{k+1}}$ とおく．

$$a_{n+1} \in a_n \in \cdots \in a_1 \in a_0$$

この a_{n+1} は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ のどれかと一致しなければならない．たとえば，

$a_{n+1}=a_i$ ならば,

$$\cdots \in a_i \in a_n \in a_{n-1} \in \cdots \in a_i \in a_n \in a_{n-1} \in \cdots \in a_1 \in a_0$$

という無限下降列が得られる．また u が無限集合ならば，選択公理によって，その一帰結として，u は可算無限部分集合を含むので，それを

$$\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$$

とする．上のように，しかし今度は各自然数 n について $b_{i_{n+1}} \in b_n \cap u$ となる i_{n+1} がある．$a_{n+1}=b_{i_{n+1}}$ とおけば,

$$\cdots \in a_{n+1} \in a_n \in \cdots \in a_1 \in u$$

なる無限下降列を得る．これは（VIII′）に反する．ゆえに,（VIII）が成立しなければならない．□

選択公理はここでも必要とされる前提になっている．ツェルメロ［60］も後この公理を両方の形で公理系へ入れた．（VIII）と（VIII′）は同意義である (gleichbedeutend) と記しているが，証明は述べていない．そして，“同意義性”に選択公理が必要であるとも言っていない．なお，ツェルメロはこの公理を**基底公理**と呼んだ．しかし，この公理に関しフォン・ノイマンを全然引用していない．ノイマンより10年後の論文だから独立に見出したわけでもないと思うが，ツェルメロの身近にいたベルナイスが（さらに10年後）“Zermelo independently introduced this axiom, calling it Axiom der Fundierung, in his [60]”と書いているので，本当にツェルメロはノイマンと同じころ独立にこの公理を案出したのかもしれない．

さて，∈-無限下降列の非存在を主張しなくてもよいのならば，その場合，$a \in a$ なる集合 a の存在を拒否できないのでちょっと嫌味ではあるが（しかしそれは直接逆理と結びつくものではない），正則性公理を採用しないですませることもできる．その意味でこの公理は必須のものではない．しかし，初期の段階でこの公理が他の公理と矛盾しないことが証明されており（[55]），さらにこの正則性公理があると，順序概念を先だって導入することなしに順序数を定義でき，順序数論の展開が容易になるという利点がある．このような理由から，今日では ZF 集合論へ（VIII）を入れておくのが普通である．

（IX）　これは本書の主題“選択公理”であって，ここに改めて説明するまでもないであろう．

以上の公理に基づいて集合論を展開できるわけであるが，ここではそれは他書にゆずることにしよう．たとえば［15］,［17］を参照されたい．



ゲーデル

以下，本書では次の用語を用いる．

ZF　：　公理系（I）～（VIII）

ZFC：　ZF＋（IX）

Z　：　公理系（I）～（VI），（VII′），（VIII）

ZC　：　Z＋（IX）

§21　構成可能性公理と選択公理，その無矛盾性

フレンケルは空集合に当たるものを**アトム**と名づけて多数導入し，選択公理がアトムをもつ集合論で証明不可能であることを証明した．今日，それを**フレンケル・モデル**と呼んでいる．しかし，アトムをもたない集合論（通常のもの）における選択公理の独立性は，1963年の有名なコーエンの仕事をまたなければならなかった．その間に，ゲーデルの偉大な業績――選択公理と一般連続体仮説の無矛盾性の証明――が現れている．コーエンの仕事はゲーデルに基礎をおいているので，ゲーデルなしには語れない．それで本書でも，まずゲーデルの結果を紹介し，その後でコーエンの独立性定理の解説へ進むことにする．

ゲーデルの方法を詳しく述べるのは，なかなかの大事業である．その前に，いろいろ集合論に関する準備をしておかなければならない．それゆえ，ここでは概略を述べることになるであろう．ともあれ，まず順序数や集合論のモデルの話からとりかかることにしよう．

順序数と基数の概念は非常に重要で，集合論を展開する上でなくてはならないものである．素朴な理論は前の章で必要であった．ここでは公理的集合論の立場から略述する．

順序数

$\mathrm{Trans}(u)$（u は**推移的**である）$\longleftrightarrow\ \forall x, y(x \in u \wedge y \in x \to y \in u)$.

$\mathrm{Ord}(\alpha)$（α は順序数である）

$$\longleftrightarrow\ \mathrm{Trans}(\alpha) \wedge \forall x, y \in \alpha(x \in y \vee x = y \vee y \in x).$$

例 1　　$\phi,\ \{\phi\},\ \{\phi, \{\phi\}\},\ \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\},\ \cdots$
は順序数である．これらをそれぞれ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

で表す．ω の定義は前節で述べた．それを上の記号を用いて書き換えると，

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

となる．すなわち，ω は自然数全体の集合である．また，ω はすべての自然数より大きい最小の順序数である．□

順序数全体はクラスをなす．それを OR で表す:

$$\mathrm{OR} = \{\alpha \mid \mathrm{Ord}(\alpha)\}.$$

任意の二つの順序数 α, β に対し，

$$\alpha \in \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta \in \alpha$$

のうちのちょうど一つが成り立つ．順序数の間では

$$\alpha \in \beta \quad を \quad \alpha < \beta \quad で表す.$$

また，一般に順序数を $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ などで表すことにしよう．

$$\alpha + 1 \underset{\mathrm{def}}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$$

を α の**後者**という．ある順序数の後者とならない順序数 α を**極限数**といい，$\alpha \in \mathrm{Lim}$ で表す．ただし，0 は除外する．ω は極限数の一例である．順序数は“それより小さいすべての順序数の集合”として特徴づけられる:

$$\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}.$$

そして，OR のどんな部分集合も（$<$ に関する）最初の要素をもっている．

モデル

M が空でない集合またはクラスであるとき，

$$\langle M, \in \rangle$$

なる形のシステムを集合論言語 $\mathscr{L}$ の $\in$-**構造**または $\in$-**モデル**といい，M をその**宇宙**という．“集合”が M の要素として解釈され，$\in$-記号が M における所属関係 $\in$ として解釈されるのである．本書ではこの形のモデルのみを考えるので，“$\in$-”を省略して，単に**モデル**とよぶ．

集合論言語 $\mathscr{L}$ の文 φ に対し，φ の中の論理記号を通常の意味に解釈し，φ の中の $\forall x, \exists y$ をそれぞれ“M のすべての要素 x に対し”，“M のある要素 y に対し”と解釈したとき，φ が正しいならば，$\langle M, \in \rangle$ は（あるいは簡潔に M は）**φ のモデル**である，または φ は $\langle M, \in \rangle$ で（あるいは M で）成り立つといい，

$$\langle M, \in \rangle \models \varphi \qquad \text{あるいは} \qquad M \models \varphi$$

で表す．そうでないとき，$M \not\models \varphi$ と書く．Σ が文のある集合のとき，Σ のすべての文が M で成り立つならば，$\langle M, \in \rangle$ は（あるいは M は）Σ のモデルであるといい，次のように表す:

$$\langle M, \in \rangle \models \Sigma \qquad \text{あるいは} \qquad M \models \Sigma.$$

累積的階層

順序数 α についての超限帰納法で，集合 V_α を次のように定義する．

$$(1) \qquad \begin{cases} V_0 = \phi \\ V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha) \\ V_\alpha = \bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\} \qquad (\alpha \in \mathrm{Lim}) \end{cases}$$

このとき，$\mathrm{Trans}(V_\alpha)$ および

$$\alpha < \beta \Longrightarrow V_\alpha \in V_\beta,\ V_\alpha \subsetneqq V_\beta$$

なる性質が導かれる．クラス

$$\{V_\alpha : \alpha \in \mathrm{OR}\}$$

を，集合の**累積的階層**という．

$$V = \{x : x = x\}$$

はすべての集合からなるクラスで，**集合論の宇宙**とよばれる．公理（VIII）のお蔭げで，

(2)
$$V = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathrm{OR}\}$$

が成り立つ．

例 2　1)　$V_{\omega+\omega} \models \mathrm{ZC}$，しかし $V_{\omega+\omega} \not\models$ (VII)．

2)　$V_\omega \models \mathrm{ZFC} -$ (VI)，そして $V_\omega \not\models$ (VI)．

3)　$V \models \mathrm{ZFC}$（これは当然）．

なお，V_ω の要素は**遺伝的に有限**な集合とよばれる．それは自分自身が有限集合であるばかりでなく，その要素がすべて遺伝的に有限であるものである．簡単な一例は，$\{\{0\}, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\}$．□

任意に集合 x をとると，(2) によって $x \in V_{\alpha+1}$ なる順序数 α が存在する．そこで，

$$\mathrm{rank}(x) = x \in V_{\alpha+1} \text{ となる最小の順序数 } \alpha$$

と定義し，$\mathrm{rank}(x)$ を x の**階数**という．これは，集合論の展開において重要な働きをする概念である．定義から直ちに

1°)　$\mathrm{rank}(x) = \alpha$　とすれば，$x \in V_{\alpha+1} - V_\alpha$

2°)　$x \in V_\alpha \leftrightarrow \mathrm{rank}(x) < \alpha$

が得られる．順序数の定義によれば，

3°)　$\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$

であることが示される．

注意　(2) についてもう少し説明しよう．$\{V_\alpha : \alpha \in \mathrm{OR}\}$ は正則性公理も選択公理も使わないで定義できて，しかも $\bigcup_\alpha V_\alpha \models \mathrm{ZF}$ である．したがって (I)〜(VII) が無矛盾であれば，これに (VIII) を加えた体系 ZF も無矛盾であり，また (I)〜(VII)，(IX) についても同様なことがいえる．さらに (I)〜(VII) と $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$ という性質から (VIII) が導かれる．したがって，(I)〜(VII) のもとで，公理 (VIII) と (2) とは同値である．

定義可能性

この言葉は既出であるが，ここでは与えられた集合に制限する場合を考える．u を空でない集合とする．集合 v が u **で定義可能**とは，$\mathscr{L}$ の論理式 $\varphi(x,$

$x_1, \cdots, x_n$)（ただし，自由変数は $x, x_1, \cdots, x_n$ だけとする）と u の要素 $a_1, \cdots, a_n$ があって

$$v = \{x \in u : u \models \varphi(x, a_1, \cdots, a_n)\}$$

が成り立つことである．φ やパラメータ $a_1, \cdots, a_n$ をいろいろ変えると，u で定義可能な集合 v がたくさん得られる．このような集合 v 全体は（u で決定される）一つのクラスをなす．これを

$$\mathrm{Def}(u)$$

で表す．

このような全体がクラスをなすことは，ちょっと不思議である．なぜなら，φ が無限に変化するのに，**1 個の**論理式 ψ をもって

$$\mathrm{Def}(u) = \{x \mid \psi(x, u)\}$$

と表すことができると言っているのだから．どうしてこのようなことができるのだろうか？　実は，それには数理論理学の伝家の宝刀——ゲーデル数化のアイデア——を使うのである．すなわち，$\mathscr{L}$ の論理式を集合としてコード化する．システムのコード化というアイデアを発見したのは，かのゲーデルである (1931 年)．ゲーデルは形式的算術の体系を自然数をもってコード化し，システムに**ついて**の議論をシステム**の中の**論理式に変換してしまった．これにより，あの有名なゲーデルの不完全性定理が生まれたわけである．それゆえ，論理式とかそれを包含するシステムとかのコード化を，彼にちなんで**ゲーデル化** (Gödelization) と呼んでいる．今日ではすっかりポピュラーなものになってしまったが，それはこのアイデアの秀抜さによるものである．

さて，$\mathscr{L}$ の論理式を集合として表現してしまえば，あのような ψ を $\mathscr{L}$ の論理式として記述できる——多少の技術は必要であるが，想像はつけられるであろう．そして，$\mathrm{Def}(u) \subseteq \mathfrak{P}(u)$ であるから，実は $\mathrm{Def}(u)$ は一つの集合となる．しかも，

$$u \in \mathrm{Def}(u)$$
$$\mathrm{Trans}(u) \to \mathrm{Trans}(\mathrm{Def}(u))$$

なる性質も証明される．

構成可能集合

α についての超限帰納法で，集合 L_α を次のように定義する．

$$(3)\qquad \begin{cases} L_0 = \phi \\ L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha) \\ L_\alpha = \bigcup\{L_\beta : \beta < \alpha\} \qquad (\alpha \in \mathrm{Lim}) \end{cases}$$

そのとき

$$L = \bigcup\{L_\alpha : \alpha \in \mathrm{OR}\}$$

と定義し，L の要素を**構成可能集合**という．すなわち，u が構成可能集合とは，ある順序数 α について

$$u \in L_\alpha$$

となることである．

前項で説明したように，$\mathrm{Def}(u)$ は $\mathscr{L}$ の一つの論理式——u だけを自由変数としてもつ——であるから，

$$(4)\qquad L = \{x : \theta(x)\}$$

となる x だけを自由変数としてもつ論理式 $\theta(x)$ を見出すことができる．それをみるには，上のことから

$$x \in L \longleftrightarrow \exists\alpha(x \in L_\alpha)$$

であるから，超限帰納法によって一つの“クラス関数”が定義されることに注意すればよい．超限帰納法による定義については，付録§27を参照されたい．

先ほど $\{V_\alpha : \alpha \in \mathrm{OR}\}$ を定義したが，$V_{\alpha+1}$ はいままでに定義された集合 V_α のすべての部分集合からなっていた．$L_{\alpha+1}$ の場合は，やはり L_α の部分集合たちであるが，それらすべてではなく，L_α で定義可能な集合たちに限っている．だから，あの L が V に等しいとはいえない．しかし，L_α も V_α と類似した性質をもっている．すなわち，

1）　各 L_α は，推移的集合である．

2）　$\beta < \alpha \rightarrow L_\beta \subsetneqq L_\alpha$．

3）　$L_\alpha \in L_{\alpha+1}$，したがって $L_\alpha \in L$．

4）　$\alpha \in L_{\alpha+1} - L_\alpha$,　　$L_\alpha \cap \mathrm{OR} = \alpha = \{\beta \in \mathrm{OR} : \beta < \alpha\}$.

5）　$\mathrm{OR} \subseteq L$.

6）　$L_\omega = V_\omega$.

さて，$\langle L, \in \rangle$ が公理（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅴ），（Ⅵ），（Ⅷ）のモデルであることを証明するのは難しくない．それが（Ⅳ）と（Ⅶ）も満足することを示すには，多少の準備が必要である．よってこれは省略するが，結局，我々は L が ZF のモデルであることを知ったことになる：

（5）　$$L \models \mathrm{ZF}, \quad \mathrm{ZF} = \{(\mathrm{I}), (\mathrm{II}), \cdots, (\mathrm{VIII})\}.$$

（集合論の宇宙 V が公理（Ⅷ）をみたしていなくても，$L \models$（Ⅷ）が成り立つ．よって，このことは公理（Ⅷ）の無矛盾性の別証明になっている．）

構成可能性公理とその無矛盾性

先に，すべての集合が構成可能集合であるとはいえないと述べた．これは，ただ感じを述べたにすぎない．「すべての集合は構成可能である」という命題，すなわち

（6）　$$V = L$$

という命題は，$\mathscr{L}$ の一つの論理式で記述することができる．それは，（4）を利用することによって

（7）　$$\forall x\, \theta(x)$$

と表すことができる．我々はこれら二つの表現を適宜用いることにする．さてそのとき，上述の"感じ"は

（8）　$$\mathrm{ZFC} \vdash \neg(V = L) \qquad (\mathrm{ZFC} \vdash V \neq L \text{ と書く})$$

と述べることができる（$\Sigma \vdash \varphi$ は，Σ から φ が証明されるの意．付録§26参照）．しかし，実は（8）は証明することが**できない**事柄である．それでは反対に，「すべての集合は構成的である」という命題は証明できるであろうか：

（9）　$$\mathrm{ZFC} \vdash V = L.$$

不幸なことに，これもまた証明**できない**事柄である．したがって，（6）は今日我々が承認している集合論の体系 ZFC においては，証明することも否定する

こともできない論理式である．このような文は，（ZFC で）**決定不能**な文であるという．この研究をおし進めると，選択公理や（一般）連続体仮説も ZFC で決定不能な文であることがわかる．ゲーデルの不完全性定理によって，形式的体系が決定不能文をもつことは宿命であるが，このように集合論にとって本質的な命題が決定不能ということは，ZFC がカントル集合論を表現するのにまだ不十分な公理系であるとも言えるであろう．

ゲーデルは（6）を新公理として掲げた:

構成可能性公理　$V=L$　**（すべての集合は構成可能集合である）.**

そして，$\mathrm{ZF}+V=L$ から選択公理と一般連続体仮説が導かれることを証明した．

ところで，構成可能性公理を L 自身**の中で**考えるとどうなるであろうか．すなわち

(10)　$$L \vDash V=L,$$

正確を期すならば，（7）を用いて

(10′)　$$L \vDash \forall x\, \theta(x).$$

この意味は，$\forall x\, \theta(x)$ の中に現れるあらゆる $\forall y$ や $\exists z$ をそれぞれ “L のすべての要素 y について”，“L のある要素 z について” と解釈して，$\forall x\, \theta(x)$ が成り立つことである．

一般に，M を集合またはクラスとし，φ を $\mathscr{L}$ の文とする．φ の中に現れるあらゆる $\forall y$ や $\exists z$ を，それぞれ $\forall y \in M$，$\exists z \in M$ によっておき換えて得られる論理式を，φ の M による**相対化**といい，

$$\varphi^M$$

で表す．たとえば，

$$\varphi \equiv \forall x\, \exists y\, \forall z\, [z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x]$$

ならば

$$\varphi^M \equiv \forall x \in M\, \exists y \in M\, \forall z \in M\, [z \in y \longleftrightarrow \forall u \in M\, [u \in z \rightarrow u \in x]]$$

である．

この記法を用いると，前に説明した“$\langle M, \in\rangle$ が φ のモデルである”ことは

“φ^M が成り立つこと”

であると言い表せる．正確に言えば

$$\mathrm{ZF} \vdash \varphi^M$$

であること，すなわち φ^M が ZF で証明されることである．

もとへもどって，(10), (10′) をこの方式で書けば

(10″)　$(V=L)^L, \quad \forall x \in L\, \theta^L(x)$

となる（二者は**同じ**論理式の別な書式である！）．(10″) はこの論理式が ZF の公理から証明できるという主張で，このことは (10), (10′) と同じ内容であり，L が $V=L$ のモデルであるということである．

ゲーデルがなしとげた第一の事柄はまさにこのこと，すなわち論理式 (10″) が ZF で成り立つことの証明である：

(11)　$\mathrm{ZF} \vdash (V=L)^L.$

これを (5) と併せてまとめると，

「$\langle L, \in\rangle$ は ZF と構成可能性公理のモデルである：

(12)　$L \vDash \mathrm{ZF} + V=L,$

すなわち

(13)　$(\mathrm{ZF} + V=L)^L$

が成り立つ.」

こうして，次の定理を得る：

定理 21.1（ゲーデル）　ZF が無矛盾であれば，ZF に構成可能性公理を加えた公理系 $\mathrm{ZF} + V=L$ も無矛盾である．

*　**証明**　ZF は無矛盾であると仮定する．もし $\mathrm{ZF} + V=L$ が矛盾するならば，$\mathrm{ZF} + V=L$ から $\curlywedge$（矛盾を表す文，たとえば任意に選んだ $\mathscr{L}$ の文 φ から作られた文 $\varphi \wedge \neg\varphi$）を証明することができる．この証明を L の中で行なうことができるから，

$$(\mathrm{ZF} + V=L)^L \to \curlywedge$$

ということになる．ところが（13）により，この式の前提は ZF で成り立っているから，結局 ZF で矛盾 $\wedge$ が証明されたことになる．これは最初の仮定に反するから，$\mathrm{ZF}+V=L$ は無矛盾でなければならない．□

選択公理の無矛盾性

次の仕事は

(14)
$$\mathrm{ZF} \vdash V=L \rightarrow \mathrm{AC}$$

を証明することである．ここに AC は公理（IX）のことである．（14）が成り立てば，（5）によって

$$(V=L)^L \rightarrow (\mathrm{AC})^L,$$

したがって（13）により

$$(\mathrm{AC})^L$$

が成り立つことになる．すなわち，

(15)
$$L \vDash \mathrm{AC}.$$

こうして，

“$\langle L, \in\rangle$ は $\mathrm{ZFC}+V=L$ のモデルである”

となり，次の定理が前定理の系として得られる：

定理 21.2（ゲーデル［31］）　ZF が無矛盾ならば，ZF に選択公理を加えた公理系 ZFC も無矛盾である．

証明　ZF は無矛盾とする．もし ZFC が矛盾すれば，

$$\mathrm{ZFC} \vdash \wedge$$

となる．しかし（14）により，このことは

(16)
$$\mathrm{ZF}+V=L \vdash \wedge$$

を導く．これは定理 21.1 に反する．ゆえに，ZFC も無矛盾でなければならない．□

述語論理の性質によって，（14）は

(14′)
$$\mathrm{ZF}+V=L \vdash \mathrm{AC}$$

と同値である．(14) から (14′) が出ることは当然で，すでに (16) を導く際利用した．(14′) から (14) が従うことは，述語論理の演繹定理による．

ここで，L-階数の概念を導入しておこう．各 $x \in L$ に対し，

$$\mathrm{Od}(x) = x \in L_{\alpha+1} \text{ となる最小の順序数 } \alpha$$

とする．このとき，

1) $L_\alpha = \{x \in L : \mathrm{Od}(x) < \alpha\}$

2) $x \in L \wedge \alpha = \mathrm{Od}(x) \rightarrow x \subseteq L_\alpha \wedge x \notin L_\alpha \wedge x \in L_{\alpha+1}$

3) $\alpha \in \mathrm{OR} \rightarrow \alpha \in L \wedge \mathrm{Od}(\alpha) = \alpha$

という性質がある．これは集合の階数に類似したものである．よって，$x \in L$ に対する $\mathrm{Od}(x)$ を x の L-**階数**とよぶ．

* **(14′) の証明** 我々は $V = L$ を仮定しているので，任意の集合 x はある L_α に含まれる．したがって，すべての L_α が整列集合であることを証明できれば，整列定理が証明されたことになり，したがって選択公理も成り立つわけである．よって，順序数 α についての超限帰納法によって

(17) すべての L_α は整列集合である

という命題を証明する．

拠点 (Basis) $\alpha = 0$．$L_0 = \phi$ はすでに整列されている．

帰納の段階 (Induction Step) 帰納法の仮定として，$\beta < \alpha$ なるすべての β に対し L_β は整列されているとし，L_β を整列する順序を $<_\beta$ で表す．この際，$\gamma < \beta < \alpha$ なる β, γ に対し $<_\gamma$ は $<_\beta$ を L_γ に制限した順序である，という性質も（帰納法の仮定として）仮定しておく．

$\alpha = \beta + 1$ という形のとき．$v, w \in L_\alpha$ とする．$v, w \in L_\beta$ のときは，$v <_\alpha w \iff v <_\beta w$ とする．$v \in L_\beta$, $w \in L_\alpha - L_\beta$ のときはいつも $v <_\alpha w$ とする．$v, w \in L_\alpha - L_\beta$ の場合が本質的で，このときは以下のようにきめる：まず，$<_\beta$ を $L_\beta{}^n = L_\beta \times \cdots \times L_\beta$ (n 個の直積) 上へ拡張して，$<^n_\beta$ を

$$x <^n_\beta y \equiv \exists k < n (x \upharpoonright k = y \upharpoonright k \wedge x(k) <_\beta y(k))$$

によって定義しておく．ただし，$x \in L_\beta{}^n$ に対し

$$x = \langle x(0), x(1), \cdots, x(n-1) \rangle$$

$$x \upharpoonright k = \langle x(0), x(1), \cdots, x(k-1)\rangle, \qquad k < n$$

とした．また，予め集合論言語 $\mathscr{L}$ の論理式全体を番号づけて並べ，それを

$$\psi_m(\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_{n_m}) \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

としておく（正しくは，これを集合列として定義しておかねばならない；　また ψ_m は記載されているものだけを自由変数としてもつものとする）．

さて，$v \in L_\alpha - L_\beta$ に対し，ある $a_1, \cdots, a_k \in L_\beta$ とある論理式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_k)$（これら以外に自由変数はないもの）があって

$$v = \{x \in L_\beta : L_\beta \models \varphi(x, a_1, \cdots, a_k)\}$$

となるから，このような $a_1, \cdots, a_k$ があるような最小番号の ψ_m を選び，そして

$$v = \{x \in L_\beta : L_\beta \models \psi_m(x, a_1, \cdots, a_{n_m})\}$$

となるような $\langle a_1, \cdots, a_{n_m}\rangle$ のうち $<_\beta^{n_m}$ に関し最小番号のもの $\langle a_1, \cdots, a_{n_m}\rangle$ をとる．$w \in L_\alpha - L_\beta$ なる w についても同様に最小番号の ψ_l と最小番号の $\langle b_1, \cdots, b_{n_l}\rangle$ とがあって，

$$w = \{x \in L_\beta : L_\beta \models \psi_l(x, b_1, \cdots, b_{n_l})\}$$

と表すことができる．このとき

$$v <_\alpha w \equiv m < l \vee (m = l \wedge \langle a_1, \cdots, a_p\rangle <_\beta^p \langle b_1, \cdots, b_p\rangle)$$

と定義する．ただし $p = n_m$ とおいた．

$\alpha \in \mathrm{Lim}$ のとき．$v, w \in L_\alpha$ に対し

$$v <_\alpha w \equiv \mathrm{Od}(v) < \mathrm{Od}(w) \vee [\mathrm{Od}(v) = \mathrm{Od}(w) \wedge v <_{\mathrm{Od}(v)+1} w]$$

とする．α が極限数であるから，右辺に現れる $\mathrm{Od}(v)+1$ は α より小さく，したがって $<_{\mathrm{Od}(v)+1}$ はすでに定義されたものである．

＊＊　これで，各 L_α が $<_\alpha$ によって整列された．□

証明の系として，L 全体を整列するクラスとしての関係 $\prec$ が得られる．すなわち，$x, y \in L$ に対し

$$x \prec y \equiv x \in L_{\mathrm{Od}(y)} \wedge x <_{\mathrm{Od}(y)} y$$

とすればよい．$<_\alpha$ は“集合としての関係”（$L_\alpha \times L_\alpha$ の部分集合である！）であったが，$\prec$ はそうでない．$\prec$ は $L \times L$ の部分クラスである．

以上で，定理 21.2 が証明された．選択公理からいろいろ興味ある定理が証明

され，数学がたいへん豊かになった．しかし，一方で逆理的な結果も導かれるので，その安全性が問題であったが，幸いなことに ZF さえ矛盾がなければ選択公理からも矛盾は出ないと保証され，全く有難いことである．我々は安心して自由に選択公理を利用することができる．

§22　選択公理の独立性

選択公理が ZF 集合論からは導出することができないことの証明に移る．目標は次の定理である：

定理 22.1　ZF が無矛盾ならば，ZF へ選択公理の否定を添加した公理系も無矛盾である．すなわち，

(1)　　$$\mathrm{Cons}(\mathrm{ZF}) \Longrightarrow \mathrm{Cons}(\mathrm{ZF} + \neg\mathrm{AC})$$

が成り立つ．

この定理の証明もはなはだやっかいである．途中でところどころ端折らなければならないことがあるが，なるべく詳しくをモットーにして解説を始めよう．

この証明には一つの大きな障害物が横たわっている．それは超数学上の問題である（**超数学**とは形式的体系について議論する数学であって，それは直観的なものである）．前節で説明したように，選択公理の無矛盾性問題は構成可能性公理 $V = L$ の無矛盾性問題に還元された．そして後者は，ZF 内で，推移クラス L（構成可能集合全体のクラス）を定義し，L 自身が ZF + $V = L$ のモデルであることを証明することによって解決されたのであった．（**注意．** このことは“ZF 内で ZF の無矛盾性が証明された”ことを意味しない．[1/]）このようなモデルは（ZF の）**内部モデル**とよばれる．ところが，$V = L$ の独立性や選択公理の独立性，すなわち $V \neq L$ や $\neg$AC の無矛盾性については，このような内部モデルの方法によっては証明できないのである．

1/　p.239 の 4) 参照．

たとえば $V \neq L$ について：もし，ZFC 内で，推移クラス M を定義して

(2)　　$$M \models \mathrm{ZF} + V \neq L$$

であることが証明できたとしよう．L は ZF の最小モデルであることが知られているので，$L \subseteq M$ である．したがって (2) から，M は L の真の拡大になっていることがいえる．このことは，ZFC において $V \neq L$ が証明されたことを意味する．しかし，ZFC + $V = L$ は無矛盾であるから（もちろん ZF の無矛盾性を仮定しての話であるが)，不合理である．また ZF $\vdash V = L \rightarrow$ AC であったから，$\neg$AC の無矛盾性証明についても内部モデルの方法は無効となることがわかる．

そういうわけで，選択公理の独立性を証明するためには他の方法を考えなければならないのである．

本書では，次の前提のもとで議論する：

(CTM)　ZFC (= ZF + AC) の可算推移モデル M が存在する．1/

すなわち，M は可算かつ推移的 ($\forall x, y\,(x \in M \wedge y \in x \rightarrow y \in M)$) な集合で，

$$M \models \mathrm{ZF} + \mathrm{AC}$$

が成り立つものである．このような M の存在を仮定する．これを**基礎モデル**とよぶ．したがって，我々は

(3)　$\mathrm{Cons}(\mathrm{ZF} + \mathrm{CTM}) \Longrightarrow \mathrm{Cons}(\mathrm{ZF} + \mathrm{CTM} + \neg \mathrm{AC})$

を示すことになり，(1) を証明したことにはならない．証明を修正して (1) の証明を得る方法については，たとえば [15; pp. 200−201] を参照されたい．

ここで，いくつかの記号や用語を導入しておく．

$\mathrm{Func}(x) \equiv x$ は関数である

$\mathrm{dom}(x) = x$ の定義域

$\mathrm{rng}(x) = x$ の値域

便宜上，ブール代数の演算記号を前章で用いたものと異なったものに変える：

$\cup, \cap, '$　をそれぞれ　$+, \cdot, -$

O, I　をそれぞれ　$\mathbf{0}, \mathbf{1}$

とする．ブール代数 B において，$X \subseteq B$ に対し

1/　CTM は Countable Transitive Model の頭文字である．また，p.239 の 5) を参照．

$$\bigvee X = \sup X = X\text{ の最小上界（存在すれば）}$$

$$\bigwedge X = \inf X = X\text{ の最大下界（存在すれば）}$$

とする．もしどんな $X \subseteq B$ についても $\bigvee X, \bigwedge X$ が存在するならば，B は**完備**であるという．

ブール値モデル

$B \in M$ はブール代数で，M-完備であるとする．断わりがないうちは，モデル M の中で事を運ぶものとする．まず，ブール値モデルの**宇宙**とよばれる M のクラスを超限帰納法によって定義する．α, β は（M の）順序数である．

$$M_0^{(B)} = 0\ (=\phi)$$
$$M_{\alpha+1}^{(B)} = \{x : \mathrm{Func}(x) \wedge \mathrm{dom}(x) \subseteq M_\alpha^{(B)} \wedge \mathrm{rng}(x) \subseteq B\}$$
$$M_\alpha^{(B)} = \bigcup\{M_\beta^{(B)} : \beta < \alpha\} \qquad (\alpha \in \mathrm{Lim})$$
$$M^{(B)} = \bigcup\{M_\alpha^{(B)} : \alpha \in \mathrm{OR} \frown M\}.$$

$M^{(B)}$ の要素は，ブール代数 B の要素を値にとる関数（**ブール値関数**）である．$M^{(B)} \subseteq M$ であるが，そのように考えない方がよい．むしろ我々は，$M^{(B)}$ を M の拡大と考えるのである．M は $M^{(B)}$ の中へ自然に埋め込まれる:

$$\check{}: M \longrightarrow M^{(B)}$$

$$\begin{cases} \check{0} = 0 \\ \check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbf{1} \rangle : y \in x\} \qquad (x \neq 0) \end{cases}$$

と定義する．この定義はいわゆる **ϵ-帰納法**による定義である（定理 27.2）．$\check{x}$ は，x の要素 y に対し $\check{x}(\check{y}) = \mathbf{1}$ となるブール値関数である．写像 $\check{}$ が M から $M^{(B)}$ の中への 1 対 1 写像であることは，ϵ-帰納法によって証明される．したがって，実際は $M^{(B)} \subseteq M$ であるが，

$$M \subseteq M^{(B)}$$

と考えることもできる．そのとき，B が $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ 以外のブール代数であれば，明らかに $M^{(B)}$ は M の真の拡大である．

$M^{(B)}$ の要素 x に B-**階数**とよばれる M の順序数 $\rho(x)$ を対応づける．それは前節の L-階数に類似している:

$$\rho(x) = \text{least}\,\alpha\,[x \in M^{(B)}_{\alpha+1}].$$

正確には $\rho_B(x)$ と書くべきであるが，添字 B を省く．

例 1　$\check{1} = \{\langle \check{0}, \mathbf{1} \rangle\} = \{\langle 0, \mathbf{1} \rangle\}$，$\check{2} = \{\langle \check{0}, \mathbf{1} \rangle, \langle \check{1}, \mathbf{1} \rangle\}$，$\cdots$．また，$\check{\omega} = \{\langle \check{0}, \mathbf{1} \rangle, \langle \check{1}, \mathbf{1} \rangle, \langle \check{2}, \mathbf{1} \rangle, \cdots\}$，すなわち，$\mathrm{dom}(\check{\omega}) = \{\check{n} : n \in \omega\}$，$\check{\omega}(\check{n}) = \mathbf{1}$．

例 2　$M^{(B)}_\alpha \times \{\mathbf{1}\} \in M^{(B)}_{\alpha+1}$．なぜなら，$M^{(B)}_\alpha$ は M の集合であり，$M^{(B)}_\alpha \times \{\mathbf{1}\}$ は関数，その定義域は $M^{(B)}_\alpha$，値域は B に含まれている．□

さて，集合論言語 $\mathscr{L}$ に $M^{(B)}$ の要素全部を定数記号として添加した言語を $\mathscr{L}_B$ と書く．$\mathscr{L}_B$ の文（＝閉論理式）は，$\mathscr{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$（ただし自由変数は示されているものだけとする）から変数 $x_1, \cdots, x_n$ へ $M^{(B)}$ の要素を代入することによって得られる．すなわち，変数が $M^{(B)}$ 上を動くときの $\mathscr{L}$ の論理式であると考えられる．

$\mathscr{L}_B$ の文 φ に，B の要素である**ブール値** $\|\varphi\|$ を対応させる．

まず，原子論理式 $x \in y$, $x = y$（$x, y \in M^{(B)}$）に対するブール値 $\|x \in y\|$, $\|x = y\|$ を**順序数の順序対**（$\rho(x), \rho(y)$）**に関する超限帰納法**で定義する．順序数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対し

$$(\alpha, \beta) \prec (\gamma, \delta) \equiv \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \vee [\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge (\alpha < \gamma \vee [\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta])]$$

と定義すると，$\prec$ は $\mathrm{OR} \times \mathrm{OR}$ の整列順序となる．ここでは，これを M に制限した関係を使う．すなわち，$\prec \upharpoonright M$ に関する超限帰納法を用いるのである．

$$\|x \in y\| = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} (y(z) \cdot \|z = x\|)$$

$$\|x = y\| = \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(x)} (-x(z) + \|z \in y\|) \cdot \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(y)} (-y(z) + \|z \in x\|)$$

例 3　$\|x \in \check{0}\| = \mathbf{0}$，$\|\check{0} = \check{0}\| = \mathbf{1}$．なぜなら，$\mathrm{dom}(\check{0}) = 0$（$= \phi$）より，$\bigvee_{z \in \mathrm{dom}(\check{0})} (\cdots) = \mathbf{0}$，$\bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(\check{0})} (\cdots) = \mathbf{1}$ となるからである．□

次に，$\mathscr{L}_B$ の一般の文については，その構成に関する帰納法によって，次のようにブール値が定義される：

$$\|\varphi \to \psi\| = -\|\varphi\| + \|\psi\|$$

$$\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$$

$$\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$$
$$\|-\varphi\| = -\|\varphi\|$$
$$\|\exists x \varphi(x)\| = \bigvee_{x \in M^{(B)}} \|\varphi(x)\|$$
$$\|\forall x \varphi(x)\| = \bigwedge_{x \in M^{(B)}} \|\varphi(x)\|.$$

これで，$\mathscr{L}_B$ の文 φ に対するブール値 $\|\varphi\|$ の定義が終わった．システム

$$\mathscr{M}^{(B)} = \langle M^{(B)}, \|\ \|\rangle$$

を**ブール値モデル**という．スクリプト体 $\mathscr{M}^{(B)}$ の代わりに，その宇宙で代用して単に $M^{(B)}$ と書く．$\|\ \|$ は正確には $\|\ \|_B$ と書くべきところであるが，これも添字 B を省略する．

ブール値モデルのアイデアは，コーエンの強制法［29］を研究していたソロベイによって発見された．彼はスコットにこのことを話し共同研究の結果，これを素晴しい理論に育て上げた．その全貌は 1967 年夏カリフォルニア大学ロスアンゼルス校（UCLA）で開催された Summer Research Institute でスコットによって発表され，その講義録が広く流布したのである．そこで予告されたスコット-ソロベイの共著は多くの人々に期待されていたが，ついに幻に終わった．しかし後，その内容は 1977 年発行のベルの本［1］にまとめられた．

ブール値モデルでは，B が $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ 以外のブール代数のとき，古典論理の真 $(=\mathbf{1})$，偽 $(=\mathbf{0})$ のほかに中間の真理値も考えているわけで，一種の多値論理になっている．そのようなアイデアはコーエン以前にかなり研究されていたのであるが，そこでは論理的妥当性（すなわち，すべてのモデルで真という性質）のみに関心が向いていて，特殊な文のモデルを考えるまでには至っていなかった．したがって，もしこのような特別なブール値モデルを考えていたならば，コーエンに先だって強制法を発見し，連続体仮説や選択公理の独立性の証明がもっと早く得られていたかもしれないと想像される．しかし，歴史はそうは進まなかった！

さて，$\mathscr{L}_B$ の文 φ に対し，φ が $M^{(B)}$ で成り立つことを $\|\varphi\| = \mathbf{1}$ によって定義し，φ は B-**妥当**であるという．

$$M^{(B)} \vDash \varphi \quad とは \quad \|\varphi\| = \mathbf{1}$$

のことである．

ブール値の基本的性質をあげよう：

1°)　$\|x=x\| = \mathbf{1}$

2°)　$x(y) \le \|y \in x\|$

3°)　$\|x=y\| = \|y=x\|$

4°)　$\|x=y\| \cdot \|\varphi(x)\| \le \|\varphi(y)\|$

5°)　$\|\exists y \in x\, \varphi(y)\| = \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(x)} x(y) \cdot \|\varphi(y)\|$

6°)　$\|\forall y \in x\, \varphi(y)\| = \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(x)} (-x(y) + \|\varphi(y)\|)$

1°) は $\in$-帰納法で証明される．2°) は $\|y \in x\|$ の定義から直ちに従う．3°) は定義の対称性から明らか．4°) の特別な場合として，

7°)　$\|x=y\| \cdot \|y=z\| \le \|x=z\|$

8°)　$\|x=y\| \cdot \|x \in z\| \le \|y \in z\|$

9°)　$\|x=y\| \cdot \|z \in x\| \le \|z \in y\|$

がある．実は，4°) の証明は 7°) ～ 9°) に基づいている．これらは B-階数についての同時帰納法によって証明される．すなわち，順序数 α についての超限帰納法で

7′)　$\rho(x'), \rho(y'), \rho(z') \le \alpha$ ならば，$\|x'=y'\| \cdot \|y'=z'\| \le \|x'=z'\|$，

8′)　$\rho(x'), \rho(y') < \alpha$ で $\rho(z') \le \alpha$ ならば，

$$\|x'=y'\| \cdot \|x' \in z'\| \le \|y' \in z'\|,$$

9′)　$\rho(x'), \rho(y') \le \alpha$ で $\rho(z') < \alpha$ ならば，

$$\|x'=y'\| \cdot \|z' \in x'\| \le \|z' \in y'\|$$

が成り立つことを証明するのである．いま，β を任意の順序数とし，$\alpha < \beta$ なるすべての α について 7′) ～ 9′) が成立すると仮定する．

8″)　$\rho(x), \rho(y) < \beta$，$\rho(z) \le \beta$ とする．$\alpha' < \beta$ なるある α' に対し，$\rho(x)$, $\rho(y) \le \alpha'$ である．また，$z' \in \mathrm{dom}(z)$ なる z' に対し $\rho(z') < \beta$ だから，やはり $\alpha'' < \beta$ なるある α'' に対し $\rho(z') \le \alpha''$．$\max(\alpha', \alpha'') = \alpha$ とおくと，$\rho(x)$, $\rho(y), \rho(z') \le \alpha$ となる．ゆえに，7′) によって $\|z'=x\| \cdot \|x=y\| \le \|z'=y\|$．

$$\therefore\quad \|x=y\|\cdot\|x\in z\| = \bigvee_{z'\in\mathrm{dom}(z)} z(z')\cdot\|z'=x\|\cdot\|x=y\|$$
$$\leq \bigvee_{z'\in\mathrm{dom}(z)} z(z')\cdot\|z'=y\|$$
$$= \|y\in z\| \quad (\text{定義より})$$

9″)　$\rho(x), \rho(y)\leq\beta$, $\rho(z)<\beta$ とする．$x'\in\mathrm{dom}(x)$ とすれば，$\rho(x')<\beta$.

$$\|x=y\|\cdot x(x')\cdot\|x'=z\| \leq (-x(x')+\|x'\in y\|)\cdot x(x')\cdot\|x'=z\|$$
$$\leq \|x'\in y\|\cdot\|x'=z\| \leq \|z\in y\|.$$

ここで，第3の $\leq$ は，$\rho(x'), \rho(z)<\beta$, $\rho(y)\leq\beta$ であるから，いま証明したばかりの 8″）を適用して得られる．

$$\therefore\quad \|x=y\|\cdot\|z\in x\| = \bigvee_{x'\in\mathrm{dom}(x)} x(x')\cdot\|x'=z\|\cdot\|x=y\| \leq \|z\in y\|.$$

7″)　$\rho(x), \rho(y), \rho(z)\leq\beta$ とする．$x'\in\mathrm{dom}(x)$ とすれば，$\rho(x')<\beta$, $\rho(y), \rho(z)\leq\beta$ であるから，いま証明したばかりの 9″）を用いて

$$\|x=y\|\cdot\|y=z\|\cdot x(x') \leq \|x=y\|\cdot\|y=z\|\cdot\|x'\in x\| \quad (2^\circ)\text{ より})$$
$$\leq \|y=z\|\cdot\|x'\in y\| \leq \|x'\in z\|$$
$$\therefore\quad \|x=y\|\cdot\|y=z\| \leq \|x=y\|\cdot\|y=z\|+(-x(x'))$$
$$\leq \|x=y\|\cdot\|y=z\|\cdot x(x')+(-x(x'))$$
$$\leq -x(x')+\|x'\in z\|.$$
$$\therefore\quad \|x=y\|\cdot\|y=z\| \leq \bigwedge_{x'\in\mathrm{dom}(x)}(-x(x')+\|x'\in z\|)$$

同様にして，

$$\|x=y\|\cdot\|y=z\| \leq \bigwedge_{z'\in\mathrm{dom}(z)}(-z(z')+\|z'\in x\|)$$
$$\therefore\quad \|x=y\|\cdot\|y=z\| \leq \|x=z\|.$$

これで，7°）～ 9°）が証明された．4°）は，これらを“拠点”として，$\varphi(x)$の構成に関する帰納法で証明される．

5°）の証明：

$$\|\exists y\in x\,\varphi(y)\| = \|\exists y\,(y\in x\wedge\varphi(y))\|$$
$$= \bigvee_{y\in M^{(B)}}\|y\in x\wedge\varphi(y)\|$$

$$= \bigvee_{y \in M^{(B)}} \bigvee_{x' \in \mathrm{dom}(x)} x(x') \cdot \| x' = y \| \cdot \| \varphi(y) \|$$

$$= \bigvee_{x' \in \mathrm{dom}(x)} x(x') \cdot \bigvee_{y \in M^{(B)}} \| x' = y \| \cdot \| \varphi(y) \|$$

$$\leq \bigvee_{x' \in \mathrm{dom}(x)} x(x') \cdot \| \varphi(x') \| \qquad (\text{4°）より})$$

逆に，

$$\bigvee_{x' \in \mathrm{dom}(x)} x(x') \cdot \| \varphi(x') \| \leq \bigvee_{x' \in \mathrm{dom}(x)} \| x' \in x \| \cdot \| \varphi(x') \|$$

$$= \| \exists y (y \in x \wedge \| \varphi(y) \|) \| = \| \exists y \in x \, \varphi(y) \|.$$

6°）の証明も同様である．

これらを基にして，次の定理が証明される：

定理 22.2（ブール値モデルの基本定理）　φ を $\mathscr{L}_B$ の文とする．

（i）　φ が述語論理の定理であれば，$M^{(B)} \models \varphi$ である．

（ii）　$\mathrm{ZF} + \mathrm{AC} \vdash \varphi$ ならば，$M^{(B)} \models \varphi$ である．

*　**証明**　（i）　まず，述語論理の公理（付録§26参照）が B-妥当であることを示そう．ここでは，2例について述べる．

$$\| \varphi \to (\psi \to \varphi) \| = - \| \varphi \| + (- \| \psi \| + \| \varphi \|) = \mathbf{1}.$$

$a \in M^{(B)}$ に対し，

$$\| \forall x \, \varphi(x) \to \varphi(a) \| = \Bigl(- \bigwedge_{x \in M^{(B)}} \| \varphi(x) \| \Bigr) + \| \varphi(a) \|$$

$$= \bigvee_{x \in M^{(B)}} (- \| \varphi(x) \| + \| \varphi(a) \|) = \mathbf{1}.$$

他の公理についても同様である．（φ が等号公理のときはすでに示した．）

次に，$\| \varphi \| = \| \varphi \to \psi \| = \mathbf{1}$ としよう．$\mathbf{1} = - \| \varphi \| + \| \psi \| = \| \psi \|$．よって，モーダス・ポーネンス“$\vdash \varphi$ かつ $\vdash \varphi \to \psi$ ならば $\vdash \psi$”は B-妥当性を保存する．また，ψ が x を自由変数として含まないとき，すべての $x \in M^{(B)}$ について $\| \psi \to \varphi(x) \| = \mathbf{1}$ ならば，

$$\mathbf{1} = - \| \psi \| + \| \varphi(x) \| = \bigwedge_{x \in M^{(B)}} (- \| \psi \| + \| \varphi(x) \|)$$

$$= - \| \psi \| + \bigwedge_{x \in M^{(B)}} \| \varphi(x) \| = \| \psi \to \forall x \, \varphi(x) \|.$$

よって，全称化推論規則 “$\vdash \psi \to \varphi(x)$ ならば $\vdash \psi \to \forall x \varphi(x)$” は B-妥当性を保存する．特殊化推論規則 “$\vdash \varphi(x) \to \psi$ ならば $\vdash \exists x \varphi(x) \to \psi$” についても同様である．

以上のことから，形式的証明の長さに関する帰納法で，「述語論理において $\vdash \varphi$ ならば $\|\varphi\| = \mathbf{1}$ である」ことが示される．

（ii） ZFC の各公理が B-妥当であることを示せばよい．

（I） $\forall x, y\,[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y]$．$x, y \in M^{(B)}$ とする．$\|x = y\|$ の定義と，6°）を用いて書き直した式 $\|\forall z(z \in x \to z \in y) \wedge \forall z(z \in y \to z \in x)\|$ とは同じものである．

（II） $\forall x, y\,\exists z\,\forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$．$x, y \in M^{(B)}$ とする．$z = \{\langle x, \mathbf{1}\rangle, \langle y, \mathbf{1}\rangle\}$ とすれば，明らかに $z \in M^{(B)}$ である．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\|\forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)\|\\
&= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(z)} (-z(u) + \|u = x\| + \|u = y\|)\\
&\quad \cdot \bigwedge_{u \in M^{(B)}} \Big\{-(\|u = x\| + \|u = y\|) + \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(z)} z(u) \cdot \|u = v\|\Big\}\\
&= \mathbf{1} \cdot \bigwedge_{u \in M^{(B)}} \{-(\|u = x\| + \|u = y\|) + (\|u = x\| + \|u = y\|)\} = \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

（III） $\forall x\,\exists y\,\forall z[z \in y \leftrightarrow \exists u \in x(z \in u)]$．$x \in M^{(B)}$ とする．$\mathrm{dom}(y) = \bigcup\{\mathrm{dom}(u) : u \in \mathrm{dom}(x)\}$, $z \in \mathrm{dom}(y)$ に対し $y(z) = \|\exists u \in x(z \in u)\|$ とすれば，$y \in M^{(B)}$．このとき，

$$
\begin{aligned}
\|\forall z[z \in y \to \exists u \in x(z \in u)]\| &= \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(y)} (-y(z) + \|\exists u \in x(z \in u)\|)\\
&= \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(y)} (-y(z) + y(z)) = \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

$$
\|\forall z[\exists u \in x(z \in u) \to z \in y]\| = \|\forall u \in x\,\forall z \in u(z \in y)\| \qquad \text{((i) より)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big\{-x(u) + \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(u)} (-u(z) + \|z \in y\|)\Big\}\\
&= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(u)} \{-(x(u) \cdot u(z)) + \|z \in y\|\} = \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

なぜなら，$u \in \mathrm{dom}(x)$, $z \in \mathrm{dom}(u)$ なら，y の定義によって $z \in \mathrm{dom}(y)$ となる．このとき，

$$x(u)\cdot u(z) \leq x(u)\cdot\|z\in u\| \leq \bigvee_{u\in \mathrm{dom}(x)} x(u)\cdot\|z\in u\|$$

$$= \|\exists u\in x\,(z\in u)\| = y(z) \leq \|z\in y\|$$

となるからである．

（IV）　$\forall x\,\exists y\,\forall z(z\in y \leftrightarrow z\subseteq x)$．$x\in M^{(B)}$ とする．$\mathrm{dom}(y)=B^{\mathrm{dom}(x)}$, $z\in \mathrm{dom}(y)$ に対し $y(z)=\|z\subseteq x\|=\|\forall u\in z(u\in x)\|$ とすれば，$y\in M^{(B)}$．このとき，$z\in M^{(B)}$ に対し

$$\|z\in y\| = \bigvee_{u\in \mathrm{dom}(y)} y(u)\cdot\|z=u\| = \bigvee_{u\in \mathrm{dom}(y)} \|u\subseteq x\|\cdot\|z=u\|$$

$$\leq \|z\subseteq x\| \qquad (\,4°\,)\text{ より）}$$

$$\therefore\quad \|\forall z(z\in y \rightarrow z\subseteq x)\| = \bigwedge_{z\in M^{(B)}}(-\|z\in y\|+\|z\subseteq x\|) = \mathbf{1}.$$

今度は $\|\forall z(z\subseteq x\rightarrow z\in y)\|=\mathbf{1}$ を証明しよう．任意に $z\in M^{(B)}$ をとる．$\mathrm{dom}(u_z)=\mathrm{dom}(x)$, $t\in\mathrm{dom}(u_z)$ に対し $u_z(t)=\|t\in z\|$ とすれば，y の定義によって $u_z\in\mathrm{dom}(y)$．そこで，

（a）　$\|z\subseteq x\rightarrow z=u_z\|=\mathbf{1}$　　（b）　$\|z\subseteq x\rightarrow u_z\in y\|=\mathbf{1}$

を証明する．これから容易に

$$\|z\subseteq x \rightarrow z\in y\| = \mathbf{1}$$

が導かれるから，目的が達せられる．

（a）　$\|u_z\subseteq z\| = \|\forall t\in u_z(t\in z)\| = \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(u_z)}(-u_z(t)+\|t\in z\|)$

u_z の定義により $-u_z(t)+\|t\in z\|=\mathbf{1}$ であるから，

$$\|u_z\subseteq z\| = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots①$$

次に，任意に $v\in M^{(B)}$ をとる．

$$\|v\in x\wedge z\| = \bigvee_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t)\cdot\|v=t\|\cdot\|v\in z\| \leq \bigvee_{t\in\mathrm{dom}(x)}\|v=t\|\cdot\|t\in z\|$$

$$= \bigvee_{t\in\mathrm{dom}(u_z)} u_z(t)\cdot\|v=t\| = \|v\in u_z\|$$

$$\therefore\quad \|v\in x\wedge z\rightarrow v\in u_z\| = \mathbf{1}.$$

v は任意だから，

$$\|x\wedge z\subseteq u_z\| = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots②$$

①と②から

$$\|z\subseteq x\| = \|z\subseteq x\|\cdot\|u_z\subseteq z\|\cdot\|x\frown z\subseteq u_z\| \leq \|z=u_z\|$$

$$\therefore\quad \|z\subseteq x \to z=u_z\| = \mathbf{1}$$

これは（a）を証明した．

（b）

$$\|z\subseteq x\| = \|\forall t(t\in z\to t\in x)\|$$

$$= \bigwedge_{t\in M^{(B)}}(-\|t\in z\|+\|t\in x\|) \leq \bigwedge_{t\in \mathrm{dom}(u_z)}(-u_z(t)+\|t\in x\|)$$

$$= \|\forall t\in u_z(t\in x)\| = \|u_z\subseteq x\| = y(u_z) \leq \|u_z\in y\|.$$

$$\therefore\quad \|z\subseteq x\to u_z\in y\| = \mathbf{1}.$$

これは（b）である．以上で，公理（IV）の B-妥当性が証明された．

（V）　$\forall y\neg(y\in 0)$．$0\in M^{(B)}$ である．このとき，

$$\|\forall y\neg(y\in 0)\| = \bigwedge_{y\in M^{(B)}}(-\|y\in 0\|) = \bigwedge_{y\in M^{(B)}}\Bigl(-\bigvee_{z\in\mathrm{dom}(0)}0(z)\cdot\|y=z\|\Bigr)$$

しかし，$\mathrm{dom}(0)=\phi$ であるから，この値は $\mathbf{1}$ となる．

（VI）　$\exists x[0\in x\land\forall y(y\in x\to y\cup\{y\}\in x)]$,　　$(0=\phi)$.

無限集合 x として $\check{\omega}$ をとることができる：

$$\|\check{0}\in\check{\omega}\land\forall y\in\check{\omega}(y\cup\{y\}\in\check{\omega})\|$$

$$= \bigvee_{n\in\omega}\check{\omega}(\check{n})\cdot\|\check{0}=\check{n}\|\cdot\bigwedge_{m\in\omega}\{-\check{\omega}(\check{m})+\|\check{m}\cup\{\check{m}\}\in\check{\omega}\|\}$$

$$= \mathbf{1}\cdot\bigwedge_{m\in\omega}\|\check{m}\cup\{\check{m}\}\in\check{\omega}\| = \bigwedge_{m\in\omega}\bigvee_{n\in\omega}\check{\omega}(\check{n})\cdot\|\check{m}\cup\{\check{m}\}=\check{n}\|$$

$$= \mathbf{1}\qquad(\because\quad \|\check{m}\cup\{\check{m}\}=\widecheck{(m+1)}\|=\mathbf{1}).$$

（VII）　$\forall x,y,z[\varphi(x,y)\land\varphi(x,z)\to y=z]$

$$\to \exists v\,\forall y(y\in v\leftrightarrow\exists x\in u\,\varphi(x,y)).$$

ここで便宜上，置換公理（VII）の代わりに，前に述べた分離公理（VII′）と，仮りに**弱置換公理（図式）**とよぶ（VII_0）とを考える：

（VII′）　$\exists v\,\forall x(x\in v\leftrightarrow x\in u\land\psi(x))$,

（VII_0）　$\forall x\in w\,\exists y\,\varphi(x,y)\to\exists v\,\forall x\in w\,\exists y\in v\,\varphi(x,y)$.

まず，後の二つから（VII）が導かれることを示そう．任意の集合 u と，(VII) の前提をみたす論理式 $\varphi(x,y)$ をとる．（VII′）によって，$w=\{x\in u:\exists y\,\varphi(x,$

$y)\}$ は集合である．そうして $\forall x \in w\, \exists y\, \varphi(x, y)$．ゆえに（$\mathrm{VII}_0$）の前提が成立するから，$\forall x \in w\, \exists y \in v\, \varphi(x, y)$ なる v が存在する．よって再び（VII′）により，$v' = \{y \in v : \exists x \in w\, \varphi(x, y)\}$ は集合であって，$\forall y\,(y \in v' \longleftrightarrow \exists x \in w\, \varphi(x, y))$ が成り立つ．このとき，明らかに

$$\forall y\,(y \in v' \longleftrightarrow \exists x \in u\, \varphi(x, y)).$$

これは（VII）の結論式である．よって，（VII′）と（VII_0）から置換公理が導かれた．置換公理から（VII′）が導かれることはすでに示した．実は（VII_0）も，（VII）から導かれるので，（VII′）+（VII_0）は（VII）と同値なわけである．

こうして，我々は（VII′）と（VII_0）の B-妥当性を証明すれば十分である．

（VII′）　$\psi(x)$ を任意に与え，これに対し $u \in M^{(B)}$ を任意にとる．$\mathrm{dom}(v) = \mathrm{dom}(u)$, $x \in \mathrm{dom}(v)$ に対し $v(x) = u(x) \cdot \|\psi(x)\|$ とすれば，$v \in M^{(B)}$．このとき，

$$\begin{aligned}
&\|\forall x\,(x \in v \longleftrightarrow x \in u \wedge \psi(x))\| \\
&= \|\forall x \in v\,(x \in u \wedge \psi(x))\| \cdot \|\forall x \in u\,(\psi(x) \to x \in v)\| \\
&= \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(v)} (-v(x) + \|x \in u\| \cdot \|\psi(x)\|) \\
&\quad \cdot \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \{-u(x) + (-\|\psi(x)\| + \|x \in v\|)\} \\
&\geq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(v)} (-v(x) + u(x) \cdot \|\psi(x)\|) \cdot \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} \{-u(x) + (-\|\psi(x)\|) + v(x)\} \\
&= \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

（VII_0）　$\varphi(x, y)$ を任意に与え，これに対し $w \in M^{(B)}$ を任意にとる．ブール代数 B は（M **の**）集合であったから，

$$B_1 = \{\|\varphi(x, y)\| : x \in w,\ y \in M^{(B)}\}$$

も集合である．$x \in \mathrm{dom}(w)$ と $b \in B_1$ に対し，

$$u_{x,b} = \{y \in M^{(B)} : \|\varphi(x, y)\| = b \text{ で，} y \text{ は } B\text{-階数 } \rho(y) \text{ が最小のものである}\}$$ [1]

1/　最小階数の集合に制限するというアイデアは**スコットのトリック**（1955）であり，§14で触れたように選択公理を仮定しないときの濃度の定義に利用される．ここでは，基礎モデル M で選択公理が成り立っているので，それを使って $\|\varphi(x, y)\| = b$ なる一つの $y = y_{x,b}$ を選出してもよい．

はある V_α に含まれるから，やはり集合である．

$$f: B_1 \longrightarrow M^{(B)}, \qquad f(b) = u_{x,b}$$

なる関数による B_1 の像 $f(B_1)$ は，基礎モデル M における置換公理によって，集合となる．よって $\bigcup f(B_1)$ も集合であるから，

$$\bigcup f(B_1) \subseteq M_\alpha^{(B)}$$

なる順序数 α が存在する（一般に，A が M の集合であって $A \subseteq M^{(B)}$ ならば，$A \subseteq M_\alpha^{(B)}$ なる順序数 α が存在する）．ゆえに，

$$\bigvee_{y \in M^{(B)}} \|\varphi(x, y)\| = \bigvee_{y \in M_\alpha^{(B)}} \|\varphi(x, y)\|$$

なる順序数 α が存在することになる．このような最小の α を $g(x)$ で表そう．すなわち，

$$(*)\quad \begin{cases} g: \mathrm{dom}(w) \longrightarrow \mathrm{OR} \cap M \\ x \in \mathrm{dom}(w) \text{ に対し } \displaystyle\bigvee_{y \in M^{(B)}} \|\varphi(x, y)\| = \bigvee_{y \in M_{g(x)}^{(B)}} \|\varphi(x, y)\|. \end{cases}$$

$\alpha = \bigcup\{g(x) : x \in \mathrm{dom}(w)\}$ とすれば，α は（M の）順序数である．そのとき（$*$）を用いて

$$\begin{aligned} \|\forall x \in w\, \exists y\, \varphi(x, y)\| &= \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(w)} \Big(-w(x) + \bigvee_{y \in M^{(B)}} \|\varphi(x, y)\|\Big) \\ &= \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(w)} \Big(-w(x) + \bigvee_{y \in M_{g(x)}^{(B)}} \|\varphi(x, y)\|\Big) \\ &\leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(w)} \Big(-w(x) + \bigvee_{y \in M_\alpha^{(B)}} \|\varphi(x, y)\|\Big). \end{aligned}$$

いま，$v = M_\alpha^{(B)} \times \{\mathbf{1}\}$ とおけば，$v \in M^{(B)}$ であって

$$\bigvee_{y \in M_\alpha^{(B)}} \|\varphi(x, y)\| = \|\exists y \in v\, \varphi(x, y)\|$$

となるから，上の不等式によって

$$\begin{aligned} \|\forall x \in w\, \exists y\, \varphi(x, y)\| &\leq \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(w)} (-w(x) + \|\exists y \in v\, \varphi(x, y)\|) \\ &= \|\forall x \in w\, \exists y \in v\, \varphi(x, y)\| \\ &\leq \|\exists v\, \forall x \in w\, \exists y \in v\, \varphi(x, y)\|. \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \|\forall x \in w\, \exists y\, \varphi(x, y) \to \exists v\, \forall x \in w\, \exists y \in v\, \varphi(x, y)\| = \mathbf{1}.$$

(VIII)　$u \neq \phi \to \exists y(y \in u \wedge y \cap u = \phi)$．これの代わりに，

(VIII*)　任意の論理式 $\varphi(x)$ に対し（もちろん x 以外に自由変数が含まれていてもよい）

(4)
$$\forall x\,[\,\forall y\in x\,\varphi(y)\to\varphi(x)]\to\ \forall x\,\varphi(x)$$

という公理（図式）を考える（厳密には（4）の全称閉包をとらなければならない）．（4）の対偶をとると

$$\exists x\neg\varphi(x)\to\exists x\,[\neg\varphi(x)\wedge\forall y\in x\,\varphi(y)]$$

であるから，ここで

$$\varphi(x)\equiv\ \neg(x\in \boldsymbol{u})$$

とすれば，ちょうど（VIII）が得られる．したがって，任意の φ について（4）が B-妥当であることを示せば十分である．

そこで，任意に $\varphi(x)$ をとる．簡単のため，$\varphi(x)$ は x 以外に自由変数を含まないとする．

$$b=\|\,\forall x\,(\forall y\in x\,\varphi(y)\to\varphi(x))\|$$

とおく．任意の $x\in M^{(B)}$ に対し

$$b\leq\|\varphi(x)\|$$

が成り立つことを，x の B-階数に関する帰納法で証明する．そうすれば

$$b\leq\bigwedge_{x\in M^{(B)}}\|\varphi(x)\|=\|\,\forall x\,\varphi(x)\|\qquad\therefore\quad\|(4)\|=\mathbf{1}$$

が得られる．帰納法の仮定として，$y\in\mathrm{dom}(x)$ なるすべての y について $b\leq\|\varphi(y)\|$ が成り立つと仮定する．このとき，左辺は y に無関係だから

$$b\leq\bigwedge_{y\in\mathrm{dom}(x)}\|\varphi(y)\|\leq\bigwedge_{y\in\mathrm{dom}(x)}(-x(y)+\|\varphi(y)\|)=\|\,\forall y\in x\,\varphi(y)\|$$

ところで，$b\leq\|\,\forall y\in x\,\varphi(y)\to\varphi(x)\|$ であるから，上の不等式と併せて

$$b\leq\|\,\forall y\in x\,\varphi(y)\to\varphi(x)\|\cdot\|\,\forall y\in x\,\varphi(y)\|\leq\|\varphi(x)\|.$$

(IX)　$\forall x\in \boldsymbol{u}\,(x\neq\phi)\wedge\forall x,y\in \boldsymbol{u}\,(x\neq y\to x\cap y=\phi)$
$$\to\exists v\ \forall x\in \boldsymbol{u}\,\exists!t\,(t\in x\wedge t\in v).$$

これは，$\boldsymbol{u}$ が空でない集合の族なら，$\boldsymbol{u}$ の各メンバー x から一要素ずつ選出して得られる選択集合 v が存在することをいっている．これは次式から導かれる．

（5）　$\exists v\, \forall x \in u\, [\exists t \in x\, \exists ! y (y \in u \wedge t \in y) \rightarrow \exists ! t (t \in x \wedge t \in v)]$.

この → の前提は，“x が，u の他のメンバーにはけっして含まれない要素 t をもつ”ことを意味している．“互いに素”より少し弱い条件であるから，（5）は（IX）より強いわけである．ブール値モデルの立場からは（5）の方が取り扱いやすいようにみえる．よって，この論理式が B-妥当であることを示そう．

$u \in M^{(B)}$ を与える．$\varphi(x, t) \equiv t \in x \wedge x \in u \wedge \exists ! y (y \in u \wedge t \in y)$ とおく．$\varphi(x, t)$ は“x が，t を要素にもつ u のただ一つのメンバーである”ことを主張している．M における選択公理を利用して，$d = \bigcup \{\mathrm{dom}(x) : x \in \mathrm{dom}(u)\}$ を整列して

$$d = \{t_\beta : \beta < \alpha\}$$

とする．ここに，α は（M の）ある順序数である．

$$\begin{cases} \mathrm{dom}(v) = d, \qquad t \in d \text{ に対し} \\ v(t) = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \bigvee_{\beta < \alpha} \Big((\| t = t_\beta \wedge \varphi(z, t_\beta) \|) \cdot \bigwedge_{\gamma < \beta} \| \neg \varphi(z, t_\gamma) \| \Big) \end{cases}$$

とすれば，$v \in M^{(B)}$ である．$v(t)$ は，t が $\varphi(z, t)$ となる最小の t_β であるという主張のブール値の和と考えられる．この v が求める v であることを示す．まず，結論 $\exists ! t (t \in x \wedge t \in v)$ のうちの一意性を証明する．それは，

$$\| \forall t \in v\, \forall t' \in v [(t \in x \wedge t' \in x \wedge x \in u) \rightarrow t = t'] \| = \mathbf{1}$$

を証明すること，すなわち $x \in \mathrm{dom}(u)$ として，任意の $t, t' \in \mathrm{dom}(v)$ に対し

（6）　$$b \underset{\mathrm{def}}{=} v(t) \cdot v(t') \cdot \| t \in x \wedge t' \in x \wedge x \in u \| \leq \| t = t' \|$$

を証明することである．

まず，φ の定義から

$$t = t_\beta \wedge \varphi(z, t) \wedge t \in x \in u \rightarrow z = x$$

は論理的に妥当であるから，

$$\| t = t_\beta \wedge \varphi(z, t) \wedge t \in x \in u \| \leq \| z = x \|$$

であることに注意する．これを用いて，$z \in \mathrm{dom}(u)$ に対し

$$\bigvee_{\beta < \alpha} \Big(\| t = t_\beta \wedge \varphi(z, t_\beta) \| \cdot \bigwedge_{\gamma < \beta} \| \neg \varphi(z, t_\gamma) \| \Big) \cdot \| t \in x \in u \|$$
$$\leq \bigvee_{\beta < \alpha} \Big(\| t = t_\beta \wedge \varphi(x, t_\beta) \| \cdot \bigwedge_{\gamma < \beta} \| \neg \varphi(x, t_\gamma) \| \Big) \cdot \| t \in x \in u \|$$

となるから，

$$v(t)\cdot\|t\in x\in u\| = \bigvee_{z\in\mathrm{dom}(u)}\bigvee_{\beta<\alpha}\Big(\|t=t_\beta\wedge\varphi(z,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(z,t_\gamma)\|\Big)\cdot\|t\in x\in u\|$$

$$\leq \bigvee_{\beta<\alpha}\Big(\|t=t_\beta\wedge\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(x,t_\gamma)\|\Big)\cdot\|t\in x\in u\| \leq \bigvee_{\beta<\alpha}b_\beta,$$

ただし $b_\beta = \|t=t_\beta\wedge\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(x,t_\gamma)\|$．同様にして，

$$v(t')\cdot\|t'\in x\in u\| \leq \bigvee_{\xi<\alpha}c_\xi,$$

ただし $c_\xi = \|t'=t_\xi\wedge\varphi(x,t_\xi)\|\cdot\bigwedge_{\eta<\xi}\|\neg\varphi(x,t_\eta)\|$．さて，

$\beta<\xi$ のとき，$b_\beta\cdot c_\xi \leq \|\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\eta<\xi}\|\neg\varphi(x,t_\eta)\| = \mathbf{0}$，

$\xi<\beta$ のとき，同様にして $b_\beta\cdot c_\xi = \mathbf{0}$，

$\xi=\beta$ のとき，$b_\beta\cdot c_\xi \leq \|t=t_\beta\|\cdot\|t'=t_\xi\| \leq \|t=t'\|$.

したがって，

$$\begin{aligned} b &= v(t)\cdot\|t\in x\in u\|\cdot v(t')\cdot\|t'\in x\in u\| \\ &\leq \bigvee_{\beta<\alpha}b_\beta\cdot\bigvee_{\xi<\alpha}c_\xi \\ &= \bigvee_{\beta<\xi<\alpha}b_\beta\cdot c_\xi + \bigvee_{\beta=\xi<\alpha}b_\beta\cdot c_\xi + \bigvee_{\xi<\beta<\alpha}b_\beta\cdot c_\xi \\ &\leq \mathbf{0}+\|t=t'\|+\mathbf{0} = \|t=t'\|. \end{aligned}$$

これで，一意性が示された．（この部分のスコットの証明は不備であった．上記は花沢正純氏が訂正したものによった．）

そこで今度は，"存在" $\exists t(t\in x\wedge t\in v)$ を示そう．これは

（7）$$\|\exists t\,\varphi(x,t)\to\exists t\in x(t\in v)\| = \mathbf{1}$$

を証明することである．$\beta<\alpha$ に対し，φ の定義から

$$\|\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(x,t_\gamma)\| \leq \|t_\beta\in x\| \qquad \cdots\cdots①$$

がいえる．改めて任意に $t\in\mathrm{dom}(x)$ （$\subseteq\mathrm{dom}(v)$）をとる．$v(t)$ の定義から

$$\begin{aligned}\|\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(x,t_\gamma)\|\cdot\|t=t_\beta\|\cdot x(t) &\leq v(t)\cdot x(t) \\ &\leq \|t\in v\|\cdot x(t).\end{aligned}$$

よって，$t \in \mathrm{dom}(x)$ について上限をとると

$$\|\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(x,t_\gamma)\|\cdot\bigvee_{t\in\mathrm{dom}(x)}x(t)\cdot\|t=t_\beta\| \le \bigvee_{t\in\mathrm{dom}(x)}x(t)\cdot\|t\in v\|$$

$$\therefore\quad \|\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(x,t_\gamma)\|\cdot\|t_\beta\in x\| \le \|\exists t\in x\,(t\in v)\|.$$

$$\therefore\quad \|\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(x,t_\gamma)\| \le \|\exists t\in x\,(t\in v)\| \qquad (①より)\quad \cdots\cdots ②$$

ところが，α についての超限帰納法によれば

$$\bigvee_{\beta<\alpha}\|\varphi(x,t_\beta)\| = \bigvee_{\beta<\alpha}\Big(\|\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(x,t_\gamma)\|\Big) \qquad \cdots\cdots ③$$

（帰納の段階で，$a,b\in B$ に対し $a+b\cdot(-a)=a+b$ を利用する.）　よって，

$$\begin{aligned}\|\exists t\,\varphi(x,t)\| &= \bigvee_{\beta<\alpha}\|\varphi(x,t_\beta)\|\\ &= \bigvee_{\beta<\alpha}\Big(\|\varphi(x,t_\beta)\|\cdot\bigwedge_{\gamma<\beta}\|\neg\varphi(x,t_\gamma)\|\Big) \qquad (③より)\\ &\le \|\exists t\in x\,(t\in v)\|. \qquad (②より)\end{aligned}$$

これで，(7) が証明され，結局 (5) が B-妥当であることがわかった.

** 以上で，定理 22.2 の証明が完了した. □

証明はずいぶん長いものとなったが，これによりブール値モデルの方法の一端を理解していただければ幸いである.（VII）と（IX）以外の証明は，かなり自然なものと言えるであろう.（IX）については，整列定理の B-妥当性を直接証明する方法もある.

§23　生成的拡大

いままでは，基礎モデル M の中に留まっていた．ここでは，M から外へ出て M を拡大する．B は M の要素で，M-完備ブール代数であるとする.

$G\subseteq B$ なる G が B 上の M-**生成的超フィルター**であるとは，

1°）　$a\in G\wedge a\le b \;\to\; b\in G$
2°）　$a\in G\wedge b\in G \;\to\; a\cdot b\in G$
（1°, 2°：フィルター；1°–3°：超フィルター）
3°）　$\forall a\in B(a\in G\vee -a\in G)$

4°）　$A \subseteq G \wedge A \in M \ \rightarrow\ \bigwedge A = \bigwedge\{a : a \in A\} \in G$

が成立するときをいう．$G \in M$ なることを要求しない．条件 4°）は G に対する一種の M-完備性である．

補題 23.1　B の任意の要素 $b \neq \mathbf{0}$ に対し，b を含む M-生成的超フィルターが存在する．

*　**証明**　M は**可算**集合であったから，B の部分集合で M に属するものは高々可算個である．よって，

$$\{A \in M : \phi \neq A \subseteq B\} = \{A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$$

とする．B は M-完備であるから，

$$a_n = \bigwedge A_n = \bigwedge\{a : a \in A_n\}$$

が存在する．

$$\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \begin{cases} b_n \cdot a_n & (b_n \cdot a_n \neq \mathbf{0} \text{ のとき}) \\ b_n - a & (b_n \cdot a_n = \mathbf{0} \text{ のとき；} \\ & \quad a \text{ は } b_n - a > \mathbf{0} \text{ なる } A_n \text{ の一要素}) \end{cases} \end{cases}$$

（帰納法の仮定 $b_n > \mathbf{0}$ と $b_n \cdot a_n = \mathbf{0}$ から $b_n - a_n > \mathbf{0}$．このことから，$b_n - a > \mathbf{0}$ なる $a \in A_n$ の存在がいえる．）によって，

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots > \mathbf{0}$$

なる列 $\{b_n : n \in \omega\}$ が得られる．

$$F = \{c \in B : \text{ある } n \in \omega \text{ に対し } c \geq b_n\}$$

なる F は，本来のフィルター（B 自身でないフィルター）である．よって，定理 18.6 の双対により，F を含む超フィルター G が存在する．もちろんこの際，
\# 我々は宇宙の選択公理を使っている（ここの議論は M からはみ出しているので，M の選択公理と言うわけにはいかない）．G は M-生成的である：$A \subseteq G$，$A \in M$ なる A をとる．$A = A_n$ なる番号 n がある．$\mathbf{0} \notin G$ だから $b_n \cdot a_n \neq \mathbf{0}$．
⁑ よって，定義から $b_n \cdot a_n = b_{n+1} \in G$．ゆえに $a_n \in G$，すなわち $\bigwedge A_n \in G$．□

M-生成的超フィルター G の作り方は M 全体に関係していたから，$G \notin M$

が予想される．

ブール代数 B の要素 a は，もし $\mathbf{0}<b<a$ なる B の要素 b が存在しないならば，**原子元**であるといい，原子元をもつブール代数は**原子的**であるという．これに対し B が原子元をもたないならば，B は**無原子的**であるという．たとえば，有限ブール代数は原子的であり，ベキ集合代数も原子的である．また，$0 \leq s < t \leq 1$ なる実数 s, t によって作られる区間 $[s, t) = \{x : s \leq x < t\}$ を半開区間とよぶとき，有限個の半開区間の和集合全体からなるブール代数は無原子的である．

補題 23.2 B が無原子的ならば，B 上の M-生成的超フィルターは M の要素でない．

* **証明** G を M-生成的超フィルターとする．もし $G \in M$ ならば，定義により $\mathbf{0} \neq \bigwedge G \in M$．$B$ は無原子的だから，$\mathbf{0} < a < \bigwedge G$ なる $a \in B$ がある．このとき，a も $-a$ も G に属さない．これは G の超フィルター性に反する．□

さて，G を B 上の M-生成的超フィルターとする．$M^{(B)}$ の G による**解釈** $i_G(x)$ を，$x \in M^{(B)}$ の B-階数 $\rho(x)$ に関する帰納法で定義する：

$$\begin{cases} i_G(0) = 0 \\ i_G(x) = \{i_G(y) : x(y) \in G\}. \end{cases}$$

このとき，

$$M[G] = i_G(M^{(B)}) = \{i_G(x) : x \in M^{(B)}\}$$

を G による M の**生成的拡大**という．これは M を拡大するモデルで，M へ G を添加することによって得られたものと考えることができる．実際，$M[G]$ が M の拡大であることは次の補題で示される：

補題 23.3 $x \in M$ に対し，$i_G(\check{x}) = x$ である．したがって，$M \subseteq M[G]$．

* **証明** $\in$-帰納法による．まず，定義から直ちに $i_G(\check{0}) = i_G(0) = 0$．$y \in x$ なる y に対し $i_G(\check{y}) = y$ であると仮定する（M は推移的だから，$y \in x \in M$ ならば $y \in M$ である）．

$$i_G(\check{x}) = \{i_G(y) : \check{x}(y) \in G\} \qquad (\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbf{1}\rangle : y \in x\})$$
$$= \{i_G(\check{y}) : \check{x}(\check{y}) = \mathbf{1} \in G \text{ (always)}\}$$
** $$= \{y : y \in x\} = x. \qquad \square$$

この拡大モデルは G を要素として含んでいる:

補題 23.4 $G \in M[G]$.

* **証明** $\underset{\sim}{G}$ とは無関係に，$\underline{G}$ を次のように定義する:

$$\begin{cases} \mathrm{dom}(\underline{G}) = \{\check{b} : b \in B\} \\ \underline{G}(\check{b}) = b \qquad (b \in B). \end{cases}$$

明らかに $\underline{G} \in M^{(B)}$. そして，

$$i_G(\underline{G}) = \{i_G(\check{b}) : \underline{G}(\check{b}) \in G, b \in B\}$$
$$= \{b : b \in G\} = G.$$

** よって，定義により $G \in M[G]$ である. $\square$

なお，$M[G]$ が推移的であることもすぐわかる.

強調したように，$\underline{G}$ は G とは無関係に定義されているが，**どんな** M-生成的超フィルター G についても

$$i_G(\underline{G}) = G$$

となる. $\underline{G}$ を $M^{(B)}$ の**標準生成的超フィルター**とよぶ. それは，

$$\|\underline{G} \text{ は } \check{B} \text{ の } \check{F}\text{-完備超フィルターである}\| = \mathbf{1}$$

が証明されるからである. ただし

$$F = \mathfrak{P}^M(B) = \{A \in M : A \subseteq B\}.$$

$M[G] = \{i_G(y) : y \in M^{(B)}\}$ であるから，各 $x \in M[G]$ に対し，$i_G(\underline{x}) = x$ となる $\underline{x} \in M^{(B)}$ が存在する. $\underline{x}$ を x の**名前**（正確には G-名前）という.

補題 23.5 $\underline{x}, \underline{y}$ がそれぞれ $x, y \in M[G]$ の名前ならば，

（i）　$x \in y \longleftrightarrow \|\underline{x} \in \underline{y}\| \in G$

（ii）　$x = y \longleftrightarrow \|\underline{x} = \underline{y}\| \in G$

が成り立つ.

これを証明するために，次の補題を準備する：

補題 23.6　$A \subseteq B$ とする．もし $\{-a : a \in A\} \in M$ で $b = \bigvee A \in G$ ならば，$A \wedge G \neq \phi$.

証明　もし $A \wedge G = \phi$ ならば，G は超フィルターであったから，$a \in A \rightarrow -a \in G$．したがって，$\{-a : a \in A\} \subseteq G$．仮定により $\{-a : a \in A\} \in M$ だから，G の生成的性から $\bigwedge\{-a : a \in A\} \in G$．しかし $-b = \bigwedge\{-a : a \in A\}$ であるから，このことは $b \in G$ に反する．□

補題 23.5 の証明　対 $(\rho(x), \rho(y))$ についての同時的超限帰納法による．

(i) だけ証明しよう．$x \in y$ とする．$(i_G(\underline{x}) =)\, x \in y = i_G(\underline{y})$ より，$z \in \mathrm{dom}(\underline{y})$，$\underline{y}(z) \in G$，$x = i_G(z)$ なる z がある．$\rho(i_G(z)) = \rho(x) < \rho(y)$ だから，$i_G(z) = i_G(\underline{x})$ へ帰納法の仮定（(ii) の方を使う）を適用して $\|z = \underline{x}\| \in G$ を得る．よって $\underline{y}(z) \cdot \|z = \underline{x}\| \in G$．　$\therefore$　$\bigvee_{z \in \mathrm{dom}(\underline{y})} \underline{y}(z) \cdot \|z = \underline{x}\| \in G$ ……①
すなわち，$\|\underline{x} \in \underline{y}\| \in G$.

逆に，$\|\underline{x} \in \underline{y}\| \in G$ とする．すると，①が成り立つ．補題 23.6 によって，$z \in \mathrm{dom}(\underline{y})$，$\underline{y}(z) \cdot \|z = \underline{x}\| \in G$ となる z がある．G は超フィルターだから

$$\underline{y}(z) \in G \quad \cdots\cdots② \qquad \|z = \underline{x}\| \in G \quad \cdots\cdots③$$

また，明らかに $i_G(z) \in i_G(\underline{y}) = y$ ……④．したがって $\rho(i_G(z)) < \rho(y)$ となるから，③へ帰納法の仮定（(ii) の方を使う）を適用して，$i_G(z) = x$ を得る．ゆえに，④から $x \in y$ となる．□

いま証明した補題は次に述べる基本定理の証明に役立つ．それは，ブール値モデルでの真理値と生成的拡大モデルでの真理値との関係を与えるものである：

定理 23.7（真理性補題）　$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は $x_1, \cdots, x_n$ 以外に自由変数を含まない $\mathscr{L}$ の論理式とする．また，$x_1, \cdots, x_n \in M[G]$ とし，それらの名前をそれぞれ $\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_n \in M^{(B)}$ とする．このとき

$$M[G] \vDash \varphi(x_1, \cdots, x_n) \Longleftrightarrow \|\varphi(\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_n)\| \in G$$

が成り立つ．

証明　φ の構成についての帰納法による．原子論理式 $x \in y$, $x = y$ については，補題 23.5 により定理は成り立つ．φ が $\neg\psi$ という形のとき，

$$M[G] \vDash \varphi \iff M[G] \nvDash \psi \iff \|\psi\| \notin G \iff -\|\psi\| \in G$$
$$\iff \|\neg\psi\| \in G \iff \|\varphi\| \in G.$$

ここで ψ に対する帰納法の仮定と G の超フィルター性を利用した．φ が $\psi \to \theta$, $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$ という形のときも同様である．φ が $\exists x\, \psi(x)$ という形のとき，

$$M[G] \vDash \exists x\, \psi(x) \iff \exists x \in M[G]\,(M[G] \vDash \psi(x))$$
$$\iff \exists \underline{x} \in M^{(B)}\,(\|\psi(\underline{x})\| \in G) \iff \|\exists x\, \psi(x)\| \in G.$$

ここでは，**最大原理**とよばれる次の結果を用いた．□

補題 23.8（最大原理）　$\psi(x)$ が $\mathscr{L}_B$ の論理式のとき，

$$\|\exists x\, \psi(x)\| = \|\psi(u)\|$$

をみたす $u \in M^{(B)}$ が存在する．

この補題の証明は省略する．たとえば，[1]，[17] を参照．

真理性補題から直ちに $M[G]$ が ZFC のモデルであることがわかる．なぜなら，φ が ZFC の公理ならば，ブール値モデルの基本定理（22.2）により，$\|\varphi\| = \mathbf{1} \in G$ となるからである．また若干の考察を行なうと，N が G を要素として含み M を部分集合として含む推移集合で，ZF のモデルであれば，N は $M[G]$ を含むということがわかる．これらをまとめると，

定理 23.9　$M[G]$ は ZFC のモデルであり，G を要素として含み M を部分集合として含むような ZF の最小推移モデルである．

勝手な集合 $G \subseteq B$ をもってきて $M[G]$ を作ったのでは，それが ZF（または ZFC）のモデルになるかどうかわからない．上の証明を検討すれば，G が M-生成的超フィルターであるという性質が有効に働いていることがわかるであろう．この G を操って，ZFC では証明できなかったある種の命題（たとえば，連続体仮説の否定）が $M[G]$ で成り立つことを示したいのである．も

ちろん，それは最初のブール代数 B をどのように選ぶかに依存している．ある特別な B に対し，M-生成的超フィルター G を直接使って，$M[G]$ では“実数が少なくとも $\aleph_2$ 個ある”ことを証明できる．たとえば［9; p.178］を参照．そこではブール代数の代わりに，本書でも後で説明される“条件の集合”とよばれる順序集合が用いられているが，本質は変わらない．（補遺 IX 参照）

対称部分モデル

前項で，生成的拡大モデル $M[G]$ を作ると，そこでは ZF の公理のみならず選択公理 AC も成立してしまうことをみた．我々の目的は選択公理の独立性を示すことにあるのであるから，その否定 $\neg$AC が成り立つモデルを構成しなければならない．そのため，$M[G]$ の適当な部分モデル N $(M \subset N \subset M[G])$ を作り，N がある種の対称性をそなえているようにする．

前のように，$B \in M$ は M-完備ブール代数とする．π が B の**自己同型**とは，$\pi : B \longrightarrow B$（全単射，すなわち 1 対 1 onto）で，すべての $a, b \in B$ に対し

$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b), \qquad \pi(-a) = -\pi(a)$$

が成り立つものをいう．したがって，$\pi(a \cdot b) = \pi(a) \cdot \pi(b)$ も成立する．B が M-完備だから，$A \subseteq B$, $A \in M$ に対し

$$\pi(\bigvee A) = \bigvee \pi(A), \qquad \pi(\bigwedge A) = \bigwedge \pi(A)$$

が成り立つ．ただし，$\pi(A) = \{\pi(a) : a \in A\}$ である．また，このような π は B の順序を保存する：

$$a < b \implies \pi(a) < \pi(b).$$

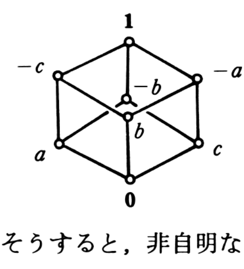
したがって，特に $\pi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ である．

例 1　右図において，

$$\pi(a) = b, \qquad \pi(b) = c, \qquad \pi(c) = a,$$

$$\pi(-a) = -b, \qquad \pi(-b) = -c, \qquad \pi(-c) = -a,$$

$$\pi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$



という π は，恒等写像でない自己同型である．□

恒等写像でない自己同型を**非自明な**自己同型とよぶ．そうすると，非自明な

自己同型をもつブール代数はたくさんあるので，このようなブール代数 B を利用すれば，その非自明自己同型 π をブール値モデル $M^{(B)}$ へ拡張することによって，$M^{(B)}$ が $\in$-関係を保存するような自己同型をもつようにできる．(ここで，$M^{(B)}$ で $\in$-関係が保存されるとは，もちろん $\|y\in x\|=\mathbf{1} \Longrightarrow \|\pi(y)\in\pi(y)\|=\mathbf{1}$ という意味である．)

そこで π を B の自己同型とし，これをブール値モデル $M^{(B)}$ へ拡張しよう．$x\in M^{(B)}$ に対し，B-階数 $\rho(x)$ についての超限帰納法で，$\pi(x)$ を次のように定義する：

1°)　$\pi(0)=0$　　(0は空集合のこと)

2°)　$y\in \mathrm{dom}(x)$ なる y については $\pi(y)$ が既に定義されたとする．そのとき，

$$\begin{cases}\mathrm{dom}(\pi(x)) = \pi``\mathrm{dom}(x) = \{\pi(y) : y\in\mathrm{dom}(x)\} \\ (\pi(x))(\pi(y)) = \pi(x(y)) \qquad (\pi(y)\in\mathrm{dom}(\pi(x))).\end{cases}$$ [1]

$\pi : M^{(B)} \longrightarrow M^{(B)}$ は1対1かつ onto である．

補題 23.10　$x\in M$ ならば $\pi(\check{x})=\check{x}$ である．

*　**証明**　$\pi(\check{0})=\pi(0)=0=\check{0}$．$\mathrm{dom}(\pi(\check{x}))=\{\pi(y) : y\in\mathrm{dom}(\check{x})\}=\{\pi(\check{y}) : y\in x\} \overset{\text{Ind. hyp.}}{=} \{\check{y} : y\in x\}=\mathrm{dom}(\check{x})$．　$(\pi(\check{x}))(\check{y}) \overset{\text{Ind. hyp.}}{=} (\pi(\check{x}))(\pi(\check{y}))=$
** $\pi(\check{x}(\check{y}))=\pi(\mathbf{1})=\mathbf{1}$．ゆえに $\pi(\check{x})=\check{x}$．□

この補題は，$M^{(B)}$ の“部分クラス”M の要素が π-不変であることをいっているわけである．よって，もちろん M 自身も不動である．

補題 23.11　$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ が $\mathscr{L}$ の論理式で，自由変数は示されているものだけとする．このとき，$x_1,\cdots,x_n\in M^{(B)}$ ならば

$$\|\varphi(\pi(x_1),\cdots,\pi(x_n))\| = \pi\|\varphi(x_1,\cdots,x_n)\|$$

が成り立つ．

*　**証明**　まず，原子論理式 $x\in y,\ x=y$ の場合を，対 $(\rho(x),\rho(y))$ に関する

1/　一般に $f``u$ は $f$ の $u$ に関する値集合である：$f``u=\{f(t) : t\in u\}$．もちろん，これは $u\subseteq\mathrm{dom}(f)$ としてである．

超限帰納法で同時的に証明する：

$$\|\pi(x)\in\pi(y)\| = \pi\|x\in y\|,$$

$$\|\pi(x)=\pi(y)\| = \pi\|x=y\|.$$

** あとは φ の構成についての帰納法によればよい．□

さて，$\mathscr{G}$ を B の自己同型からなる任意の群とし，$\mathfrak{S}$ を $\mathscr{G}$ のすべての部分群の集合とする．各 $x\in M^{(B)}$ に対し，

$$\mathscr{G}_x = \{\pi\in\mathscr{G} : \pi(x)=x\}$$

とおく．$\mathscr{G}_x$ は $\mathscr{G}$ の部分群である．Γ を $\mathfrak{S}$ における一つのフィルターとする：

1°）　$H, K\in\Gamma \Longrightarrow H\cap K\in\Gamma$,

2°）　$H\in\Gamma,\ H\subseteq K\in\mathfrak{S} \Longrightarrow K\in\Gamma$.

フィルター Γ が**正規**であるとは，

3°）　$\pi\in\mathscr{G},\ H\in\Gamma \Longrightarrow \pi H\pi^{-1}\in\Gamma$

が成り立つことである．

$x\in M^{(B)}$ が条件 $\mathscr{G}_x\in\Gamma$ をみたすならば，x は Γ-**対称**であるという．

遺伝的対称名前とよばれる $M^{(B)}$ の要素のクラス $M_\Gamma^{(B)}$ を次のように定義する：

1°）　$0\in M_\Gamma^{(B)}$

2°）　$x\in M^{(B)},\ \mathrm{dom}(x)\subseteq M_\Gamma^{(B)},\ \mathscr{G}_x\in\Gamma \Longrightarrow x\in M_\Gamma^{(B)}$.

これは，$M^{(B)}$ の要素 x の B-階数 $\rho(x)$ に関する超限帰納法による定義である．

$x\in M$ に対し常に $\pi(\check{x})=\check{x}$ であったから，

$$\mathscr{G}_{\check{x}} = \{\pi\in\mathscr{G} : \pi(\check{x})=\check{x}\} = \mathscr{G}\in\Gamma.$$

したがって，

すべての $x\in M$ に対して，$\check{x}\in M_\Gamma^{(B)}$.

さて，G を B 上の M-生成的超フィルターとし，i_G を $M^{(B)}$ の G による解釈とする：

$$\begin{cases} i_G(0) = 0 \\ i_G(x) = \{i_G(y) : x(y)\in G\} \qquad (x\in M^{(B)}\text{ のとき}) \end{cases}$$

この $x\in M^{(B)}$ を $M_\Gamma^{(B)}$ に制限することによって，N を

$$N = \{i_G(x) : x\in M_\Gamma^{(B)}\}$$

と定義する．$x \in M$ ならば $\check{x} \in M_\Gamma^{(B)}$ であったから，$x = i_G(\check{x}) \in N$，したがって埋蔵の意味で $M \subseteq N$．よって，

$$M \subseteq N \subseteq M[G].$$

N を M の**対称拡大**または $M[G]$ の**対称部分モデル**という．

定理 23.12　N は ZF の推移モデルである．

*　**証明**　$x \in N, y \in x$ とする．すると，$i_G(\underline{x}) = x$ なる $\underline{x} \in M_\Gamma^{(B)}$，$i_G(\underline{y}) = y$ なる $\underline{y} \in M^{(B)}$ がある．$i_G(\underline{y}) \in i_G(\underline{x})$ なるゆえ，$\underline{y} \in \mathrm{dom}(\underline{x})$ としてよい．2°）により $\mathrm{dom}(\underline{x}) \subseteq M_\Gamma^{(B)}$．したがって $\underline{y} \in M_\Gamma^{(B)}$．これは $y = i_G(\underline{y}) \in N$ を示したことになる．よって，N は推移的である．

N は推移的で M を含むから，

$$N \vDash (\mathrm{I}) \wedge (\mathrm{V}) \wedge (\mathrm{VI}) \wedge (\mathrm{VIII})$$

なることがわかる．

$$N \vDash (\mathrm{II}), \qquad \text{すなわち} \qquad N \vDash \forall x, y\, \exists z\, \forall t\, (t \in z \longleftrightarrow t = x \vee t = y)$$

であること：$x, y \in N$ とする．$x = i_G(\underline{x})$, $y = i_G(\underline{y})$ なる $\underline{x}, \underline{y} \in M_\Gamma^{(B)}$ がある．そこで

$$\| \underline{z} = \{\underline{x}, \underline{y}\} \| = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots ①$$

となる $\underline{z} \in M_\Gamma^{(B)}$ が存在することを示そう．それには，$\underline{z} = \{\langle \underline{x}, \mathbf{1} \rangle, \langle \underline{y}, \mathbf{1} \rangle\}$ とすればよい．これに対し①が成り立つことは，定理 22.2 (ii) の証明と同様である．問題は $\underline{z} \in M_\Gamma^{(B)}$ の証明である．まず，$\mathrm{dom}(\underline{z}) = \{\underline{x}, \underline{y}\} \subseteq M_\Gamma^{(B)}$ はよろしい．よって，$\mathscr{G}_{\underline{z}} \in \Gamma$ を示せばよい．任意に $\pi \in \mathscr{G}_{\underline{x}} \cap \mathscr{G}_{\underline{y}}$ をとる．$\pi(\underline{x}) = \underline{x}$, $\pi(\underline{y}) = \underline{y}$ である．$\mathrm{dom}(\pi(\underline{z})) = \{\underline{x}, \underline{y}\}$ はすぐわかる．また $\pi(\underline{z})(\pi(\underline{x})) = \pi(\underline{z})(\pi(\underline{y})) = \pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ である．一方，$\underline{z}(\pi(\underline{x})) = \underline{z}(\underline{x}) = \mathbf{1} = \underline{z}(\pi(\underline{y}))$．したがって $\pi(\underline{z}) = \underline{z}$．ゆえに $\pi \in \mathscr{G}_{\underline{z}}$．これは $\mathscr{G}_{\underline{x}} \cap \mathscr{G}_{\underline{y}} \subseteq \mathscr{G}_{\underline{z}}$ を示した．$\mathscr{G}_{\underline{x}}$, $\mathscr{G}_{\underline{y}} \in \Gamma$ であるから $\mathscr{G}_{\underline{z}} \in \Gamma$．よって $\underline{z} \in M_\Gamma^{(B)}$．

ところで真理性補題によれば，$z = i_G(\underline{z})$ とするとき，①は

$$M[G] \vDash z = \{x, y\}$$

であることを教える．しかし $x, y, z \in N$ であり，この論理式は Δ_0 論理式（束

縛変数が，ある集合の要素になっている論理式；$z=\{x,y\}$ は $\forall t\in z(t=x\vee t=y)$ であり，$\forall t$ の t が $t\in z$ となっている）であるから，

$$N\vDash z=\{x,y\}$$

となる．（**注意．** N が推移的だから，$z\in N$ であれば，$t\in z$ なる t は N に属するから，$\forall t\in z\cdots$ は広い宇宙 $M[G]$ で考えても狭い宇宙 N で考えても同じになる．）

$N\vDash$（III）の証明は，上の証明と定理 22.2（ii）の（III）の証明を基にして，読者の演習に委ねることにする．

次にベキ集合の公理の証明であるが，これは少し面倒である．s,t が $M[G]$ 上を走るとき

（1）　$$\forall s[s\subseteq N\Longrightarrow\exists t\in N(s\subseteq t)]$$

が成り立つことを示す．このとき N は**ほとんど宇宙的**であるという．

(1)の証明　$s\subseteq N$ とする．すると，$s\subseteq i_G``(M_\Gamma^{(B)}\cap M_\alpha^{(B)})$ となる順序数 α がある——これは s が $M[G]$ の集合なので $M[G]$ の置換公理が適用できるからである；類似の論法をすでに定理 22.2（ii）の（VII_0）の証明で使った．$M_\Gamma^{(B)}\cap M_\alpha^{(B)}$ は $M^{(B)}$ の集合であるから，$\mathrm{dom}(\underline{t})=M_\Gamma^{(B)}\cap M_\alpha^{(B)}$, $x\in\mathrm{dom}(\underline{t})$ に対し $\underline{t}(x)=\mathbf{1}$ とすれば $\underline{t}\in M^{(B)}$．このとき

$$\begin{aligned} i_G(\underline{t}) &= \{i_G(x):\underline{t}(x)\in G\}=\{i_G(x):x\in M_\Gamma^{(B)}\cap M_\alpha^{(B)}\}\\ &= i_G``(M_\Gamma^{(B)}\cap M_\alpha^{(B)}). \end{aligned}$$

ゆえに $s\subseteq i_G(\underline{t})$ となるから，$\underline{t}\in M_\Gamma^{(B)}$ がいえれば，$i_G(\underline{t})\in N$ であって（1）が証明されたことになる．——$\mathrm{dom}(\underline{t})\subseteq M_\Gamma^{(B)}$ は明らかだから，$\mathscr{G}_{\underline{t}}\in\Gamma$ をいえばよい．任意に $x\in M^{(B)},\pi\in\mathscr{G}$ をとる．このとき

$$\begin{aligned} \pi\mathscr{G}_x\pi^{-1} &= \{\pi\sigma\pi^{-1}:\sigma(x)=x\}=\{\tau:\pi^{-1}\tau\pi(x)=x\}\\ &= \{\tau:\tau(\pi(x))=\pi(x)\}=\mathscr{G}_{\pi(x)}. \end{aligned}$$

$x\in M_\Gamma^{(B)}$ の場合は，$\mathscr{G}_x\in\Gamma$ だから，Γ の正規性によって $\pi\mathscr{G}_x\pi^{-1}\in\Gamma$ となり，したがって上の等式から $\mathscr{G}_{\pi(x)}\in\Gamma$．また，$\mathrm{dom}(\pi(x))=\pi``\mathrm{dom}(x)\subseteq M_\Gamma^{(B)}$（帰納法による）であるから，結局 $\pi(x)\in M_\Gamma^{(B)}$．すなわち，

すべての $\pi\in\mathscr{G}$ に対し，$x\in M_\Gamma^{(B)}\Longrightarrow\pi(x)\in M_\Gamma^{(B)}$.　……②

また，$x \in M_\alpha^{(B)}$ の場合，α についての超限帰納法によって $\pi(x) \in M_\alpha^{(B)}$ であることがわかる．よって，②と併せて

$$\text{すべての } \pi \in \mathscr{G} \text{ に対し，} x \in M_\Gamma^{(B)} \cap M_\alpha^{(B)} \Longrightarrow \pi(x) \in M_\Gamma^{(B)} \cap M_\alpha^{(B)}$$

すなわち

$$\textbf{すべての } \pi \in \mathscr{G} \text{ に対し，} \pi``(M_\Gamma^{(B)} \cap M_\alpha^{(B)}) \subseteq M_\Gamma^{(B)} \cap M_\alpha^{(B)} \qquad \cdots\cdots③$$

また，③で π の代わりに π^{-1} を考えることにより

$$\text{すべての } \pi \in \mathscr{G} \text{ に対し，} M_\Gamma^{(B)} \cap M_\alpha^{(B)} \subseteq \pi``(M_\Gamma^{(B)} \cap M_\alpha^{(B)}) \qquad \cdots\cdots④$$

③と④から

$$\text{すべての } \pi \in \mathscr{G} \text{ に対し，} \pi``(M_\Gamma^{(B)} \cap M_\alpha^{(B)}) = M_\Gamma^{(B)} \cap M_\alpha^{(B)}$$

さて，任意に $\pi \in \mathscr{G}$ をとる．あの $\underline{t}$ に対し，$\pi \in \mathscr{G}_{\underline{t}}$ であることがわかる．したがって

$$\mathscr{G}_{\underline{t}} = \mathscr{G} \in \Gamma$$

こうして $\underline{t} \in M_\Gamma^{(B)}$ が証明され，したがって（1）が導かれた．$\dashv$

N がほとんど宇宙的であることから，ベキ集合公理が容易に導かれる：

$$N \models (\mathrm{IV}), \qquad \text{すなわち} \qquad N \models \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x).$$

ここでは省略するが，実は前もって $N \models (\mathrm{VII}')$（分離公理）を示しておくとよい．そのとき，ベキ集合公理は

（2）　　$$N \models \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

から得られる．なぜなら，x に対し（2）なる y を求めておいて，$y_1 = \{z \in y : z \subseteq x\}$ とすれば，この y_1 はもとの形の y の条件をみたすからである．ところで，（2）は

$$\forall x \in N\, \exists y \in N\, [\mathfrak{P}(x) \cap N \subseteq y]$$

ということである．そして，これは N がほとんど宇宙的であるという性質から直ちに得られるものである．

だいぶ長くなったので，ZF の残りの公理の証明は読者に委ね，定理 23.12

⁑ の証明はここで打ち切ることにする．□

この対称拡大を選択公理の独立性に利用しようというのが，我々の目標である．

§24 強 制 法

選択公理が成立しないモデルを作るのが目標である．選択公理が成り立てば，実数連続体 $\mathscr{R}$ が整列されるから，$\mathscr{R}$ が整列できないようなモデルを作ればよい．我々はルーズな意味で実数と ω の部分集合とを同一視する．すなわち，$\mathscr{R}$ と $\mathfrak{P}(\omega)$ とは同じものとみなすのである．

前節で定義した対称拡大モデル N が所用のものであることを示す．ただし，目的が達せられるように，ブール代数 B，その自己同型のある群 $\mathscr{G}$，対応する $\mathfrak{G}$ の正規フィルター Γ をキチンときめなければならない．

M はいままでどおり基礎モデルである．すなわち，可算推移的集合で，ZFC のモデルになっているものである．断わりがあるまでは，M の中で議論する．しかし，強調のため“M で”あるいは“$\in M$”と書くこともある．

$\langle P, \leq\rangle$ を M における順序集合とする．これを**強制概念**とよび，P の要素を**強制条件**という．$u \subseteq P$ が

(1) $$\forall x \in u\, \forall y \in P\, (y \leq x \to y \in u)$$

をみたすならば，u を**開集合**という．このような u 全体の集合が開集合族の条件を満足していることは，容易に検証できる．これにより定まる位相を，P の**順序位相**という．

いま，$p \in P$ に対し

$$[p] = \{q \in P : q \leq p\}$$

とすれば，$\mathscr{O}_1 = \{[p] : p \in P\}$ は順序位相空間 P の開基をなす:

1°) 各 $[p]$ は開集合である，

2°) 任意の開集合 u $(\neq \phi)$ に対し，$[p] \subseteq u$ なる $\mathscr{O}_1$ のメンバー $[p]$ がある．

P の任意の部分集合 u に対し，

$$u^i = \{p \in P : [p] \subseteq u\} = \{p : \forall q (q \leq p \to q \in u)\},$$

$$u^- = \{p \in P : \exists q \in u (q \leq p)\}$$

$$u^c = P \setminus u = \{p \in P : p \notin u\}$$

と定義し，それぞれ，u の**開核**，**閉包**，補集合という．u^i は u に含まれる最大の開集合であり，u^- は u を含む最小の閉集合である．この位相空間では，任意個の開集合の共通部分が開集合になる．また，明らかに P は T_0-分離公理をみたす——$p \neq q$ ならば，一方を含み他方を含まない開集合が存在する．

P の開集合 u が，条件

$$u = u^{-i} = u^{cici}$$

をみたすならば，u は**正則開集合**であるという．（ユークリッド平面で考えれば，その正則開集合は針穴があいていないようなベッタリした開集合である．）

$$B = \{u \subseteq P : u = u^{-i}\}$$

とするとき，システム $\langle B, \subseteq \rangle$ は完備ブール代数になることが証明される．これを

$$\mathrm{RO}(P)$$

で表し，P 上の**正則開集合代数**とよぶ．$\mathrm{RO}(P)$ におけるブール演算は次のとおりである．ただし，u, v および u_λ $(\lambda \in \Lambda)$ はすべて $\mathrm{RO}(P)$ の要素である．

1°）　$\mathbf{0} = \phi$，$\mathbf{1} = P$

2°）　$u + v = (u \cup v)^{-i}$

3°）　$u \cdot v = u \cap v$

4°）　$\displaystyle\bigvee_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda = \Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda\Big)^{-i}$

5°）　$\displaystyle\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda = \Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda\Big)^{i}$

6°）　$u \leq v \iff u \cdot v = u$
$\qquad\qquad \iff u \subseteq v.$

したがって，$\mathrm{RO}(P)$ は普通の集合代数ではない．また，P の選び方によって $\mathrm{RO}(P)$ は無原子的になりうる．

いま，

（2）　$H(\omega \times \omega, 2) = \{p : \mathrm{Func}(p) \wedge \mathrm{dom}(p) \subseteq \omega \times \omega$
$\qquad\qquad \wedge\ \mathrm{dom}(u)$ は有限集合 $\wedge\ \mathrm{rng}(p) \subseteq \{0, 1\}\}$

と定義し，$H(\omega \times \omega, 2)$ における順序関係 $\leq$ を

$$p \leq q \ \equiv\ p \supseteq q \qquad (p, q \in H(\omega \times \omega, 2))$$

によって定義する．この強制概念 $\langle H(\omega \times \omega, 2), \leq \rangle$ は，我々が選択公理の独立性を証明するとき使うものである．

補題 24.1 (2) で定義された $P=H(\omega\times\omega,2)$ に対し，RO(P) は無原子的である．したがって，補題 23.2 により RO(P) 上の M-生成的超フィルターは M の要素でない．

* **証明** $u\subseteq P$ が開集合のとき，$u\subseteq u^{-i}$ であるから，

(3) $u\in \mathrm{RO}(P) \iff u^{-i}\subseteq u \iff \forall q\notin u\,\exists r\leq q\,\forall s\leq r(s\notin u)$

が成り立つ．これは任意の P について成立する性質である．さて，P は (2) の H であった．任意の $p\in P$ をとり，$p=\{\langle m_1,n_1,j_1\rangle,\cdots,\langle m_l,n_l,j_l\rangle\}$ とする．任意に $q\notin[p]$ をとると，$q\not\supseteq p$．たとえば，$\langle m_1,n_1,j_1\rangle\notin q$ としよう．$r=\{\langle m_1,n_1,1-j_1\rangle\}\cup q$ とすれば，$r\leq q$ であって，$\forall s\leq r(s\notin[p])$．ゆえに，(3) によって $[p]\in\mathrm{RO}(P)$．すなわち，P の開基に属する開集合はすべて RO(P) に属する．だから，我々の RO(P) が無原子的であることを証明するためには，任意の $p\in P$ について $\mathbf{0}\subsetneq[q]\subsetneq[p]$ となる $q\in P$ が存在することをいえばよい．そのために，p は上記の p とする．すべての $m_1,n_1,\cdots,m_l,n_l$ より大きい自然数 m をとり，$q=\{\langle m,n,1\rangle\}\cup p$ とすれば，$q\supsetneq p$．

** したがって，$\phi\neq[q]\subsetneq[p]$ である．□

一般の P では $[p]$ が正則開集合になるとは限らないことに注意しておこう．また補題 24.1 は，(2) において $\omega\times\omega$ を他の無限集合でおき換えても成立する．そして，**この場合** $[p]$ は閉集合にもなる．すなわち，$[p]$ は**開かつ閉な**集合である (clopen set という)．たとえば，$P=H(\omega\times\omega,2)$ の場合，

$$p=\{\langle\langle 1,1\rangle,0\rangle,\langle\langle 2,3\rangle,1\rangle\}$$

に対し，

$$[p]=\{q\in P: q(1,1)=0\wedge q(2,3)=1\}$$

である．このとき，

$$[p]^c=[p_1]\cup[p_2],\qquad p_1(1,1)=1,\qquad p_2(2,3)=0$$

となる．

さて，G_1 が P 上で M-**生成的**であるとは，$G_1\subseteq P$ であって，

1°) $p\in G_1,\ p\leq q \implies q\in G_1$,

2°)　G_1 の要素は二つずつ互いに**両立的**である，すなわち

$$p, q \in G_1 \Longrightarrow \exists r \in G_1 (r \leq p \wedge r \leq q),$$

3°)　$D \subseteq P$, D は M-稠密 $\Longrightarrow D \cap G_1 \neq \phi$

が成立することである．ただし，D が M-**稠密**とは，$D \in M$ であって

$$\forall p \in P \, \exists q \in D [q \leq p]$$

が成り立つことをいう．これは，D が（M において）順序位相空間 P で稠密であるということに他ならない．

たとえば，$P = H(\omega \times \omega, 2)$ のとき

$$D = \{p \in P : \exists m \in \omega [\langle m, 4 \rangle, \langle m, 7 \rangle \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(m, 4) \neq p(m, 7)]\}$$

とすれば，D は M-稠密である．

一般に，強制概念 $\langle P, \leq \rangle$ において，各 $p \in P$ に対し $e(p) = [p]^{-i}$ によって，写像

$$e : P \longrightarrow \mathrm{RO}(P)$$

を定義する．（もし P が（2）の $H(\omega \times \omega, 2)$ ならば，$e(p) = [p]$ でよいからこの場合は簡単になる．）　この e を自然な埋蔵という．このとき，次の性質が成り立つ:

1°)　$p \leq q \Longrightarrow e(p) \subseteq e(q)$

2°)　p, q が両立する $\Longrightarrow e(p) \cap e(q) \neq \phi$

3°)　$\{e(p) : p \in P\}$ は順序位相空間 $\mathrm{RO}(P) - \{\mathbf{0}\}$ で稠密である．

［3°) の証明: 任意の $u \in \mathrm{RO}(P) - \{\phi\}$ をとる．u は P の空でない開集合だから，ある開基開集合を含む．すなわち，$e(p) \subseteq u$ なる $p \in P$ がある．u の $\mathrm{RO}(P) - \{\phi\}$ における近傍は $\{v \in \mathrm{RO}(P) - \{\phi\} : v \subseteq u\}$ であるから，いまのことは（u の近傍）$\cap \{e(p) : p \in P\} \neq \phi$ を意味する．］

この埋蔵によって，次のことがわかる．

$$B = \mathrm{RO}(P)$$

とおく．

補題 24.2　(i)　G が B 上の M-生成的超フィルターであれば，$G_1 = e^{-1}(G)$ は P 上で M-生成的である．

(ii) G_1 が P 上で M-生成的ならば，

$$G = \{b \in B : \exists p \in G_1(e(p) \leq b)\}$$

は B 上の M-生成的超フィルターである．

(iii) G と G_1 が（i）または（ii）の関係にあるとき，

$$M[G] = M[G_1]$$

が成り立つ．ここで，一般に $M[X]$ とは，$X \in M_1 \wedge M \subseteq M_1$ なるZFの最小の推移モデル M_1 の意である．

証明は読者の演習に委ねる．（[40; p. 155] 参照）

定義 24.3 $p \in P$，φ を $\mathscr{L}_B$ の文（$M^{(B)}$ の要素を定数記号として許す論理式で，自由変数を含まないもの）とする．関係 $p \Vdash \varphi$ を

(4) $$p \Vdash \varphi \iff e(p) \leq \|\varphi\|$$

によって定義し，p は φ を**強制する**という．

強制関係の基本性質は次のとおり．

定理 24.4 φ, ψ を $\mathscr{L}_B$ の文とし，$\theta(x)$ を $\mathscr{L}_B$ の論理式で x 以外に自由変数を含まないものとする．このとき，

(i) $p \Vdash \neg\varphi \iff \neg\exists q \leq p(q \Vdash \varphi)$

(ii) $p \Vdash \varphi \wedge \psi \iff p \Vdash \varphi$ かつ $p \Vdash \psi$

(iii) $p \Vdash \varphi \vee \psi \iff \forall q \leq p \exists r \leq q(r \Vdash \varphi$ または $r \Vdash \psi)$

(iv) $p \Vdash \varphi \to \psi \iff \forall q \leq p[q \Vdash \varphi \implies \exists r \leq q(r \Vdash \psi)]$

(v) $p \Vdash \forall x \theta(x) \iff \forall x \in M^{(B)}(p \Vdash \theta(x))$

(vi) $p \Vdash \exists x \theta(x) \iff \forall q \leq p \exists r \leq q \exists u \in M^{(B)}(r \Vdash \varphi(u))$

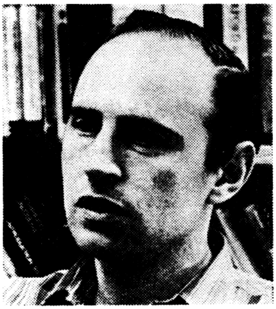
(vii) $\forall p(p \Vdash \varphi) \iff \|\varphi\| = \mathbf{1}$

(viii) $\forall p(p \nVdash \varphi) \iff \|\varphi\| = \mathbf{0}$

(ix) $p \Vdash \varphi$ かつ $q \leq p \implies q \Vdash \varphi$

(x) $\forall p \exists q \leq p(q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi)$

強制関係という概念は，連続体仮説や選択公理の独立性の証明のために，コーエンが初めて案出したものである．コーエンは強制関係 $p \Vdash \varphi$ を，φ が原子論理式 $x \in y,\ x = y$ である場合から出発して**直接的に**定義した．それは“情報” p の範囲では φ が真である，という感じのものを与えていた．それをブール値として把握したのは，前述のように，ソロベイである．



コーエン

* 読者は，強制関係の上記性質 (i)〜(vi) のうち (i), (ii), (v) が基本であることに気づくであろう．(i), (ii), (v) を認めれば，(iii) は $\varphi \vee \psi$ を $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ として，(iv) は $\varphi \to \psi$ を $\neg\varphi \vee \psi$ として，(vi) は $\exists x\, \theta(x)$ を $\neg \forall x \neg \theta(x)$ として，形式的に導くことができる．なぜなら，一般に φ_1 と φ_2 が論理的に同値ならば，それらのブール値は等しいので，(4) によって，$p \Vdash \varphi_1 \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi_2$ となるからである．そして，(i), (ii), (v) はブール値計算で容易に検証できる．ここでは (i) と (v) のみを証明しよう．簡単のため，

(5)　　　　p と $e(p)$ を同一視する

と約束する．したがって，(4) は

(4′)　　　　$$p \Vdash \varphi \Longleftrightarrow p \leq \|\varphi\|$$

となる．

(i)　$p \Vdash \neg\varphi$ ならば，$p \leq \|\neg\varphi\|$ すなわち $p \leq -\|\varphi\|$．そこで，$q \leq p$ とすれば，$q \nleq \|\varphi\|$．なぜなら，もし $q \leq \|\varphi\|$ なら，$q = p \cdot q \leq -\|\varphi\| \cdot \|\varphi\| = \mathbf{0}$ となり，不合理．すなわち，$\forall q \leq p \neg(q \Vdash \varphi)$．逆に $p \nVdash \neg\varphi$ ならば，$p \nleq -\|\varphi\|$．したがって，$p \cdot \|\varphi\| \neq \mathbf{0}$．$P$ は $\mathrm{RO}(P) - \{\mathbf{0}\}$ で稠密だから，$q \leq p \cdot \|\varphi\|$ なる q がある．このとき，$q \leq p$ かつ $q \leq \|\varphi\|$．ゆえに，$\exists q \leq p (q \Vdash \varphi)$．

(v)　$p \Vdash \forall x\, \theta(x)$ とすれば，$p \leq \bigwedge_{x \in M^{(B)}} \|\theta(x)\|$．したがって，

$$\forall x \in M^{(B)} (p \leq \|\theta(x)\|), \qquad \text{すなわち} \qquad \forall x \in M^{(B)} (p \Vdash \theta(x)).$$

これは可逆的である．

他の性質の証明は，読者に委ねる．□

定理 24.5 (真理性補題)　$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は $\mathscr{L}$ の論理式で，示されたもの以外に自由変数をもたないとする．G が P 上で M-生成的であり，$\underset{\sim}{x}_1, \cdots, \underset{\sim}{x}_n \in M^{(B)}$ がそれぞれ $x_1, \cdots, x_n \in M[G]$ の名前ならば，

$$M[G] \vDash \varphi(x_1, \cdots, x_n) \iff \exists p \in G\,(p \Vdash \varphi(\underset{\sim}{x}_1, \cdots, \underset{\sim}{x}_n)).$$

$x \in M^{(B)}$ が $\underset{\sim}{x} \in M[G]$ の名前という場合，詳しくは次のようにいうべきであろう．$B = \mathrm{RO}(P)$ であった．いま $G' = \{u \in B : \exists p \in G\,(e(p) \leq u)\}$ とするとき，G' は B 上の M-生成的超フィルターである．このとき，$x \in M[G']$ に対する $i_{G'}(\underset{\sim}{x}) = x$ となる $\underset{\sim}{x} \in M^{(B)}$ をとる．しかし $M[G'] = M[G]$ だから，万事 OK である．定理の証明は，既出の真理性補題 23.7 といま述べた対応関係から直ちにわかるであろう．$\|\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \cdots, \underset{\sim}{x}_n)\| \in G'$ は“ある $p \in G$ に対し $e(p) \leq \|\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \cdots, \underset{\sim}{x}_n)\|$”に他ならないからである．

これで準備が完了したから，選択公理の独立性の証明に進もう．

§25　選択公理の独立性証明

本節では，$P = H(\omega \times \omega, 2)$, $B = \mathrm{RO}(P)$ とし，$P \in M$ とする．したがって，もちろん $B \in M$ である．

$\mathscr{G}$ と Γ を適当に選んで，M の対称拡大 N が選択公理をみたさないようにするのである．

G を B 上の M-生成的超フィルターとする．$p \in P$ と $e(p) \in B$ を同一視して，$e(p)$ の代わりに p と書く．各 $n \in \omega$ に対し

$$x_n = \{j \in \omega : \exists p \in G\,(p(n, j) = 1)\}$$

とし，

$$A = \{x_n : n \in \omega\}$$

とおく．

$$\mathrm{dom}(\underset{\sim}{x}_n) = \mathrm{dom}(\check{\omega}) = \{\check{0}, \check{1}, \check{2}, \cdots, \check{j}, \cdots\}$$

$$\underset{\sim}{x}_n(\check{j}) = \bigvee\{p \in P : p(n, j) = 1\}$$

$$\mathrm{dom}(\underset{\sim}{A}) = \{\underset{\sim}{x}_n : n \in \omega\}$$

$$\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{x}_n) = \mathbf{1}$$

とすれば，$\underset{\sim}{x}_n \in M^{(B)}$, $\underset{\sim}{A} \in M^{(B)}$ であって

$$i_G(\underset{\sim}{x}_n) = x_n, \quad i_G(\underset{\sim}{A}) = A$$

が成り立つ．**証明** $i_G(\underset{\sim}{x}_n) = \{i_G(\check{j}) : \underset{\sim}{x}_n(\check{j}) \in G\} = \{j \in \omega : \bigvee\{p \in P : p(n, j) = 1\} \in G\} = \{j \in \omega : \exists p \in G[p(n, j) = 1]\} = x_n$．ここで，第3の＝の成立は補題23.6によるものである．また，$i_G(\underset{\sim}{A}) = \{i_G(\underset{\sim}{x}_n) : \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{x}_n) \in G, n \in \omega\} = \{x_n : n \in \omega\} = A$．$\dashv$

この $\underset{\sim}{x}_n$ を，“実数” x_n の**標準名前**という．Γ を適当に選んで，$\underset{\sim}{x}_n$ と $\underset{\sim}{A}$ とが $M_\Gamma^{(B)}$ に属するようにする．そうすれば，$x_n, A \in N$ がいえるわけである．

ここで，$\bigvee\{p \in P : p(n, j) = 1\}$ の内容を説明しておこう．これは正確には，$\bigvee\{e(p) : p \in P \wedge p(n, j) = 1\}$ のことである．この上限は実は有限個の $e(p)$ の上限に等しく，したがって $\bigvee$ は単なる和集合となる．なぜなら，$e(p)$ が clopen だからである．たとえば，

$$\{e(p) : p(2, 3) = 1\}$$

を考えよう．$n \leq 2$, $j \leq 3$ に対する $p(n, j)$ の値をきめると，$\mathrm{dom}(p) = \{(n, j) : n \leq 2, j \leq 3\}$ なる有限関数 p が定まる．$p(2, 3)$ は値1ときめられているから，このような関数 p は $2^{3\times4-1} = 2^{11}$ 通りある．それらを p_k（$k = 0, 1, 2, \cdots, 2^{11}-1$）としよう．このとき，

$$\bigvee\{e(p) : p(n, j) = 1\} = \bigcup\{e(p_k) : k < 2^{11}-1\}$$

となる．そしてこれは，$p(n, j) = 1$ となる $p \in P$ 全体の集合に他ならない：

$$(1) \qquad \bigvee\{e(p) : p(n, j) = 1\} = \{p \in P : p(n, j) = 1\} \in B$$

したがって，

$$(2) \qquad -\bigvee\{e(p) : p(n, j) = 1\} = \{p \in P : p(n, j) = 0\}$$
$$= \bigvee\{e(p) : p(n, j) = 0\}$$

となるのである．

さて，$\omega = \{0, 1, 2, \cdots, j, \cdots\}$ の置換全体の集合を $\omega!$ で表す．$\pi \in \omega!$ とす

る．π は，我々の強制概念 $P=H(\omega\times\omega,2)$ の順序保存 1 対 1 変換（自己同型）を誘導する．すなわち，$p\in P$ に対し πp を次のように定義する：

$$\begin{cases}\mathrm{dom}(\pi p) = \{\langle \pi n, m\rangle : \langle n, m\rangle \in \mathrm{dom}(p)\},\\ \pi p(\pi n, m) = p(n, m).\end{cases}$$

そうすると，この π は $B=\mathrm{RO}(P)$ の自己同型を誘導する：

$$\pi u = \bigvee\{\pi p : p\leq u\} \qquad (u\in B)$$

（正確には $\bigvee\{e(\pi p) : e(p)\leq u\}$ である）

そこで，$\mathscr{G}$ を B の $\omega!$ によって誘導されたすべての自己同型からなる群とする．

E を ω の**有限**部分集合とするとき，

$$\mathrm{fix}(E) = \{\pi\in\mathscr{G} : \forall n\in E(\pi n=n)\}$$

とし，$\mathfrak{S}$ を $\mathscr{G}$ のすべての部分群の族とする．$\mathrm{fix}(E)\in\mathfrak{S}$ である．このとき，Γ を $\{\mathrm{fix}(E) : E\subset\omega\wedge E$ は有限$\}$ によって生成された $\mathfrak{S}$ 上のフィルターとする：

$$\Gamma = \{K\in\mathfrak{S} : \exists E[\mathrm{fix}(E)\subseteq K]\}$$

ただし，E は ω の有限部分集合を走るとする．

（3）　$$\pi\in\mathscr{G},\ K\in\Gamma \implies \pi K\pi^{-1}\in\Gamma$$

が成り立つから，Γ は正規である．**（3）の証明**　$\mathrm{fix}(E)\subseteq K$ なる E がある．$\pi\,\mathrm{fix}(E)\pi^{-1}=\mathrm{fix}(\pi E)\in\Gamma$ であり，$\mathrm{fix}(\pi E)\subseteq\pi K\pi^{-1}$ だから，$\pi K\pi^{-1}\in\Gamma$．⊣

このように定義した群 $\mathscr{G}$ と正規フィルター Γ とに対し，§23 の方法で M の**対称拡大** N を作る：

$$N = \{i_G(x) : x\in M_\Gamma^{(B)}\}.$$

そうすると，定理 23.12 によって N は ZF の推移モデルである．このとき，

（4）　すべての $n\in\omega$ に対し，$x_n\in N$

（5）　$A\in N$

が成り立つ．

（4）の証明　帰納法で容易に $\pi(\check{m})=\check{m}$ $(m\in\omega)$ であることがわかる．

$\mathrm{dom}(\pi(\underline{x}_n)) = \pi``\mathrm{dom}(\underline{x}_n) = \{\pi(\check{m}) : m\in\omega\} = \{\check{m} : m\in\omega\}\subseteq M_\Gamma^{(B)}$.

$\pi(\underline{x}_n)(\pi(\check{m})) = \pi(\underline{x}_n(\check{m})) = \pi(\bigvee\{p\in P : p(n,m)=1\})$

$$= \bigvee\{\pi p : \pi p(\pi n, m) = 1\} = \bigvee\{q : q(\pi n, m) = 1\}$$
$$= \underline{x}_{\pi n}(\check{m}) = \underline{x}_{\pi n}(\pi(\check{m}))$$

したがって，$\pi(\underline{x}_n) = \underline{x}_{\pi n}$．これより，

$$\mathscr{G}_{\underline{x}_n} = \{\pi : \pi(\underline{x}_n) = \underline{x}_n\} = \{\pi : \underline{x}_{\pi n} = \underline{x}_n\}$$
$$= \{\pi : \pi n = n\} = \mathrm{fix}(\{n\}) \in \Gamma.$$

よって，$\underline{x}_n \in M_\Gamma^{(B)}$．ゆえに $x_n \in N$．⊣

(5) の証明　いま証明したことから，$\mathrm{dom}(\underline{A}) = \{\underline{x}_n : n \in \omega\} \subseteq M_\Gamma^{(B)}$ である．任意に $\pi \in \mathscr{G}$ をとる．

$$\mathrm{dom}(\pi\underline{A}) = \pi``\mathrm{dom}(\underline{A}) = \{\pi(\underline{x}_n) : n \in \omega\}$$
$$= \{\underline{x}_{\pi n} : n \in \omega\} = \{\underline{x}_k : k \in \omega\} = \mathrm{dom}(\underline{A}).$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi(\underline{A})(\pi(\underline{x}_n)) = \pi(\underline{A}(\underline{x}_n)) = 1 \\ \underline{A}(\pi(\underline{x}_n)) = \underline{A}(\underline{x}_{\pi n}) = 1 \end{array}\right\} \quad (\underline{A} \text{ の定義より}).$$

したがって，$\pi(\underline{A}) = \underline{A}$ である．このことは

$$\mathscr{G}_{\underline{A}} = \{\pi : \pi\underline{A} = \underline{A}\} = \mathscr{G} \in \Gamma$$

を示している．ゆえに $\underline{A} \in M_\Gamma^{(B)}$，したがって $A \in N$．⊣

定理 25.1　モデル N では“実数全体の集合を整列することができない”．したがって

$$N \vDash \neg\mathrm{AC}.$$

*　**証明**　$A \in N$ であった．

$$N \vDash \text{“}A \text{ は整列されない”}$$

を示そう．これが示されれば，A は実数たちの一つの集合であるから，N ではもちろん実数全体の集合を整列することはできない．

まず，x_n が互いに異なることを示さなければならない：

(6)　　$n \neq m$ に対し，$N \vDash x_n \neq x_m$．

(6) の証　$n \neq m$ とする．

$$\|\underline{x}_n = \underline{x}_m\| = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots①$$

がいえればよい．なぜなら，そのとき $\|\underline{x}_n = \underline{x}_m\| \notin G$，したがって真理性補題

によって

$$M[G] \models x_n \neq x_m.$$

$x_n, x_m \in N$ であるから，このことは（6）を意味する．さて①の証明であるが，B は無原子的で P は $B-\{\mathbf{0}\}$ で稠密だから，

$$p \leq \|\underline{x}_n = \underline{x}_m\| \text{ なる } p \in P \text{ は存在しない} \qquad \cdots\cdots②$$

がいえれば，①がいえたことになる．そこで，$p \leq \|\underline{x}_n = \underline{x}_m\|$ なる p が存在したとしよう．p は有限関数だから，

$$(n, j) \notin \mathrm{dom}(p), \qquad (m, j) \notin \mathrm{dom}(p)$$

なる $j \in \omega$ がある．そこで，

$$q = p \cup \{\langle\langle n, j\rangle, 1\rangle, \langle\langle m, j\rangle, 0\rangle\}$$

とすると，

$$q \leq \|\check{j} \in \underline{x}_n\| \quad \text{かつ} \quad q \leq \|\check{j} \notin \underline{x}_m\| \qquad \cdots\cdots③$$

が成り立つ．これは，一般に $r \in P$ に対し

$$r \leq \|\check{j} \in \underline{x}_n\| \iff r(n, j) = 1 \qquad \cdots\cdots④$$

$$r \leq \|\check{j} \notin \underline{x}_m\| \iff r(n, j) = 0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

が成り立つからである．前者を証明しておこう．

（7） $$\|\check{j} \in \underline{x}_n\| = \bigvee_{k \in \omega} (\underline{x}_n(\check{k}) \cdot \|\check{k} = \check{j}\|) = \underline{x}_n(\check{j})$$

であるから，

$$\begin{aligned} r \leq \|\check{j} \in \underline{x}_n\| &\iff e(r) \subseteq \underline{x}_n(\check{j}) \\ &\iff e(r) \subseteq \bigvee \{e(s) : s(n, j) = 1\} \\ &\iff e(r) \subseteq \{s \in P : s(n, j) = 1\} \qquad ((1) \text{ より}) \\ &\iff r(n, j) = 1. \end{aligned}$$

これは④である．⑤は（2）を用いて同様に導かれる．

（7）によって，③は

$$q \leq \underline{x}_n(\check{j}) \quad \text{かつ} \quad q \leq -\underline{x}_m(\check{j}) \qquad \cdots\cdots③'$$

と書ける．そこで，$\|\underline{x}_n \neq \underline{x}_m\|$ を計算すると，

$$\|\underline{x}_n \neq \underline{x}_m\| = -\bigwedge_{k \in \omega}(-\underline{x}_n(\check{k}) + \|\check{k} \in \underline{x}_m\|) \cdot \bigwedge_{k \in \omega}(-\underline{x}_m(\check{k}) + \|\check{k} \in \underline{x}_n\|)$$

$$= -\bigwedge_{k\in\omega}(-\underline{x}_n(\check{k})+\underline{x}_m(\check{k}))\cdot(-\underline{x}_m(\check{k})+\underline{x}_n(\check{k})) \qquad ((7)\text{ より})$$

$$= \bigvee_{k\in\omega}\{(\underline{x}_n(\check{k})\cdot-\underline{x}_m(\check{k}))+(\underline{x}_m(\check{k})\cdot-\underline{x}_n(\check{k}))\}$$

$$\geq \underline{x}_n(\check{j})\cdot-\underline{x}_m(\check{j})$$

$$\geq q \qquad (③'\text{ より})$$

すなわち，$q\leq\|\underline{x}_n\neq\underline{x}_m\|$．しかし，$q\leq p\leq\|\underline{x}_n=\underline{x}_m\|$ であったから $q=\mathbf{0}$ ($e(q)=\phi$ の意）が出て，不合理となる．ゆえに①が証明され，したがって（6）が得られた．⊣

定理を証明するために，

（8）　　　$N\vDash$“ω から A への1対1写像は存在しない”

を証明する．よって，

$$N\vDash f:\omega\xrightarrow{1-1}A \qquad \cdots\cdots⑥$$

と仮定して，矛盾を導く．$f\in N$ だから，$i_G(\underline{f})=f$ なる $\underline{f}\in M_\Gamma^{(B)}$ がある．もちろん $M[G]\vDash f:\check{\omega}\xrightarrow{1-1}A$ でもあるから，真理性補題 24.5 によって

$$p_0\in G,\quad p_0\leq\|\underline{f}:\check{\omega}\xrightarrow{1-1}\underline{A}\| \qquad \cdots\cdots⑦$$

なる p_0 が存在する．($i_G(\check{\omega})=\omega$ に注意．）このとき

$$q\leq p_0,\quad q\leq\|\underline{f}\text{ は関数でない}\| \qquad \cdots\cdots⑧$$

という q が存在することを示す．そのとき⑦により

$$q\leq\|\underline{f}:\check{\omega}\xrightarrow{1-1}\underline{A}\|\leq\|\underline{f}\text{ は関数である}\|$$

となるから，$q=\mathbf{0}$（すなわち $e(q)=\phi$）が出て，不合理となる．これで目的が達せられたことになる．

⑧なる q の存在：$\underline{f}\in M_\Gamma^{(B)}$ より $\mathscr{G}_{\underline{f}}\in\Gamma$．よって，$E\subseteq\omega$，$\mathrm{fix}(E)\subseteq\mathscr{G}_{\underline{f}}$ なる有限集合 E がある．E の有限性と⑥から，ある $j\in\omega, n\in\omega-E$ に対し

$$N\vDash f(j)=x_n$$

となる．よって，

$$p_1\leq\|\underline{f}(\check{j})=\underline{x}_n\|$$

なる $p_1\in G$ がある．$p_0\in G$ であったから，

$$r\leq p_0,\quad r\leq p_1$$

なる $r \in G$ がある．これらの n, r に対し，

1°）πr と r は両立的である

2°）$\pi \in \mathrm{fix}(E)$

3°）$\pi n \neq n$

なる $\pi \in \mathscr{G}$ が存在する．［証明：$\mathrm{dom}(r) = \{\langle l_1, m_1\rangle, \cdots, \langle l_k, m_k\rangle\}$ とする．$n' > \max\{l_1, \cdots, l_k\}$, $n' > n$, $n' > \max E$ なる n' をとり，$\pi(n) = n'$, $\pi(n') = n$, $m \neq n$, $m \neq n'$ なる m に対し $\pi(m) = m$ とすれば，この π は 1°）～ 3°）をみたす．］ $\mathrm{fix}(E) \subseteq \mathscr{G}_{\underline{f}}$ としたのであったから，2°）により

$$\pi \underline{f} = \underline{f}.$$

ところで，$\pi \check{j} = \check{j}$, $\pi \underline{x}_n = \underline{x}_{\pi n}$ であるから，④により

$$\pi r \leq \| \pi \underline{f}(\pi \check{j}) = \pi \underline{x}_n \| \qquad \text{すなわち} \qquad \pi r \leq \| \underline{f}(\check{j}) = \underline{x}_{\pi n} \|.$$

これと $r \leq p_1 \leq \| \underline{f}(\check{j}) = \underline{x}_n \|$ とを併せて

$$q \underset{\mathrm{def}}{=} r \cup \pi r \leq \| \underline{f}(\check{j}) = \underline{x}_n \| \cdot \| \underline{f}(\check{j}) = \underline{x}_{\pi n} \|.$$

$\pi n \neq n$ より，前に証明したように，$\| \underline{x}_n \neq \underline{x}_{\pi n} \| = \mathbf{1}$．したがって，

$$q \leq \| \underline{f}(\check{j}) = \underline{x}_n \wedge \underline{f}(\check{j}) = \underline{x}_{\pi n} \wedge \underline{x}_n \neq \underline{x}_{\pi n} \|.$$

これは $q \leq \| \underline{f}$ は関数でない$\|$ を意味している．よって⑧が示され，結局，(8) が導かれた．

(8) は，“N では A が整列されない” ことを意味するから，もちろん

$$N \models \text{“実数全体の集合は整列されない”}$$

が成り立ち，したがって

$$N \models \neg \mathrm{AC}$$

** が証明された．□

いまの証明はブール値でおし通してしまったが，強制法を適宜使うこともできる．$p \Vdash \varphi$ は “モデルで φ が成り立つ” ということに似た扱いであるから，好都合なこともある．たとえば，②のすぐ後のところは

$$p \Vdash \underline{x}_n = \underline{x}_m \text{　なる　} p \in P \text{ が存在したとしよう}$$

となり，③は

$$q \Vdash \check{j} \in \underline{x}_n \qquad \text{かつ} \qquad q \Vdash \check{j} \notin \underline{x}_m,$$

⑦, ⑧ はそれぞれ次のような表現になる:

$$p_0 \Vdash \underline{f}: \check{\omega} \xrightarrow{1-1} \underline{A}, \qquad q \Vdash \text{“}\underline{f}\text{ は関数でない”}.$$

証明の系として，次の結果が得られる:

定理 25.2　「無限集合は可算(無限)部分集合を含む」という命題は ZF と独立である.

*　**証明**　前定理の証明は,

$$N \vDash \text{“}A\text{ は可算部分集合を含まない”}$$

ということを示している．A はもちろん N においても無限集合である．よって，ZF のモデルで「可算部分集合を含まない無限集合が存在する」という命題が成立するものがある．これは定理を証明したことになる．□ **

デデキント有限集合というのは，自分自身がその真部分集合とは決して1対1の対応がつけられない集合のことであった．それは，可算部分集合を含まないことと同値である．なぜなら，もし無限集合 A がデデキント有限でなければ(すなわち**デデキント無限**なら)，A から A の真部分集合 A_1 への1対1対応 f がある．$a \notin \mathrm{rng}(f)$ とし，$S=\{a, f(a), f(f(a)), \cdots, f^n(a), \cdots\}$ を作れば，S は A の可算部分集合となる．[$a \neq f(a)$ は明らか．したがって $f(a) \neq f^2(a)$. また，$a \notin \mathrm{rng}(f) \wedge f^2(a) \in \mathrm{rng}(f)$ だから $a \neq f^2(a)$，等々.]　よって，

$$N \vDash \text{“}A\text{ はデデキント有限である”}.$$

したがって，次の結果が得られた:

定理 25.3　「無限かつデデキント有限な集合が存在する」という命題は ZF と矛盾しない.

このようにして，もちろん他の工夫も必要であるが，第3章で述べた諸命題が ZF と無矛盾かつ独立であることを証明できる．また，諸命題の間の強弱の関係もかなり判明している．本文に現れた諸命題について，それらの関係のダイヤグラムを付録に書いておいた．詳細は [6] を参照されたい.

付　　録

ここで，本文の補いをしたいのであるが，紙数の都合上かなり制限しなければならない．素朴な順序数の理論，特にその中に含まれる超限帰納法，基数の理論は，一般の集合論に委ねることにする．公理的集合論の立場での，超限帰納法による定義や ∈-帰納法による定義は，本文で重要な役割を担ってきたので，これについては解説したい．また，述語論理の体系とモデルの概念も説明する．それから，選択公理を否定するような興味ある公理が知られているので，これも概略を解説しよう．

§26　述語論理の体系

命題論理は，文章の内容を問わないで，文章と文章の間の論理的関係・連結を研究する論理である．これに対し，文章を分析して述語と対象の関係まで含めて研究する論理が**述語論理**である．ここでは**第1階**の述語論理の体系を述べる．（第4章§20で述べた内容と重複する点もあるが，最初から述べることにする．）第1階というのは，**対象を走る**変数**のみ**が許され，**対象の集合を走る**変数が許され**ない**体系であることを示唆している．

初めに，

$\mathscr{S}$：　**述語記号**とよばれる有限または無限個の記号 $\underset{\sim}{P}_i^{(k)}$ の集合

ここで，上付き添字 k は，引数の個数が k であることを示唆する．$k=0$ ならば，命題記号という．下付き添字 i は，単なる番号である．

$\mathscr{C}$：　**定数記号**とよばれる有限または無限個の記号 $\underset{\sim}{c}_i$ の集合

を用意しておく．$\mathscr{S}\neq\phi$．しかし，$\mathscr{C}=\phi$ であってもよい．

言語 $\mathscr{L}(\mathscr{S},\mathscr{C})$ とは，次のシステムをいう．

（I）　記号系

1°）　論理的連結詞：　→，∧，∨，¬

2°）　限定作用素　：　∀，∃

3°）　述語記号　　：　$\mathscr{S}$ に属するものすべて

4°)　個体定数　　：　$\mathscr{C}$ に属するものすべて

5°)　個体変数　　：　$\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots$　(無限個)

6°)　特異記号　　：　(　と　)とコンマ.

(このほかに関数記号を含める場合もあるが，簡単のためこれは除いておく．そうしても効力に変わりはない.)

(II)　形成規則

1°)　項の定義: 各個体定数と各変数を**項**という.（もし記号系が関数記号――たとえば f^2――をもつならば，$f^2(\underset{\sim}{c}_1, f^2(\mathrm{v}_3, \underset{\sim}{c}_0))$ のようなたくさんの項が生ずる.）

2°)　論理式の定義

(i)　$\underset{\sim}{P}_i^{(0)} \in \mathscr{S}$ ならば，それは論理式である.

(ii)　$t_1, \cdots, t_k$ が項で，$\underset{\sim}{P}_i^{(k)} \in \mathscr{S}$ ならば，$\underset{\sim}{P}_i^{(k)}(t_1, \cdots, t_k)$ は論理式である.（i), (ii）の論理式を**原子論理式**という.

(iii)　φ, ψ が論理式ならば，$(\varphi) \to (\psi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$ および $\neg(\varphi)$ は論理式である.

(iv)　x が変数で，φ が論理式ならば，$\forall x(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$ は論理式である．このとき，φ は $\forall x$ または $\exists x$ の**作用域**または作用範囲といい，x は**束縛変数**，x は $\forall$ または $\exists$ によって束縛されている，という．束縛されていない変数を**自由変数**という．束縛とか自由とかは一つの論理式の中でいわれることである.

(v)　以上によって与えられるもののみが論理式である.

カッコは略記として適当に省略する．たとえば，$(\varphi) \to (\psi)$ の代わりに $\varphi \to \psi$ と書く．しかし，カッコが省けないこともある.

なお，自由変数を含まない論理式は，**文**または**閉論理式**という.

述語論理の体系 $\mathscr{T}(\mathscr{S}, \mathscr{C})$

述語論理の体系 $\mathscr{T} = \mathscr{T}(\mathscr{S}, \mathscr{C})$ とは，言語 $\mathscr{L}(\mathscr{S}, \mathscr{C})$ をもち，次の公理系と推論規則をもつ形式的体系をいう:

(III)　**公理系**　($\varphi, \psi, \theta, \varphi(x)$ は $\mathscr{L}(\mathscr{S}, \mathscr{C})$ の論理式を表す超記号である.)

(1)　$\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(2)　$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to (\varphi \to \theta))$

(3)　$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

(4_1)　$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$　　　(4_2)　$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$

(5_1)　$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$　　　(5_2)　$\psi \to (\varphi \vee \psi)$

(6)　$(\varphi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \theta))$

（7）　$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$

（8）　$\neg\neg\varphi \to \varphi$

（9）　$\forall x\,\varphi(x) \to \varphi(t)$

（10）　$\varphi(t) \to \exists x\,\varphi(x)$

ここで，$\varphi(t)$ は，$\varphi(x)$ において x のすべての出現を項 t でおき換えた論理式で，t は $\varphi(x)$ において **x に対し自由な項**である．すなわち，t は イ）定数か，ロ）x 自身か，ハ）t は x と異なる変数 y で，x が $\varphi(x)$ において $\exists y$ または $\forall y$ の作用域に現れない項である．これは，代入によって意味が変わってしまうことを避ける条件である．たとえば，$\varphi(x)=\exists y(x<y)$ に対しては $\varphi(y)=\exists y(y<y)$ となり，全くの偽命題が生じてしまう．このような代入を許さないための工夫である．

（IV）　推論規則

（11）　**モーダス・ポーネンス（分離規則）**

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

（12）　**全称化規則**

$$\frac{\psi \to \varphi(x)}{\psi \to \forall x\,\varphi(x)}$$

（13）　**存在化規則**

$$\frac{\varphi(x) \to \psi}{\exists x\,\varphi(x) \to \psi}$$

ただし，(12)，(13) において，x は推論規則の**固有変数**とよばれ，ψ には自由変数として現れないものとする．

以上がシステム $\mathscr{T}(\mathscr{S},\mathscr{C})$ の定義である．もしなにかある数学理論を展開したいならば，その理論に特有な定数記号や述語記号（あるいは関数記号）および**数学の公理**をつけ加えた体系を考えることになる．たとえば，集合論であれば $\in$ 記号と空集合記号 ϕ および§20 で述べた（I）～（IX）が必要である．

これらの公理と推論規則をもとに，形式的証明，形式的定理の概念が定義され，述語論理のシンタックス（文章論）が展開される．上記システムはクリーネの体系である．

もし $\mathscr{S}$ が等号を意図する記号 = をもつならば，公理系へ §20 で述べた等号公理（i）～（iv）をつけ加える．この場合 $\mathscr{T}^{=}(\mathscr{S},\mathscr{C})$ と書き，**等号をもつ述語論理の体系**という．

述語論理のモデル

シンタックスに対し，意味とか解釈を取り扱うセマンティクス（意味論）がある．これは，形式体系の種々のモデルを考え，モデルで論理式が成り立つとか成り立たないとかということを論ずるものである．

$\mathscr{M}=\langle M,V\rangle$ という形のシステムを，言語 $\mathscr{L}(\mathscr{S},M)$ に対する**構造**または**モデル**という．ここに，

1°）　M は空でない集合で，モデルの**宇宙**という．

2°）　V は $\mathscr{S}$ の各述語記号 $\underset{\sim}{P}^{(k)}$ に，M 上の k-項述語（k-項関係）$V(\underset{\sim}{P}^{(k)})\subseteq M^k$ を対応させる関数で，**付値**とよばれる．これを $P^{(k)}_{\mathscr{M}}$ で表そう．

言語 $\mathscr{L}(\mathscr{S},M)$ のモデル $\mathscr{M}=\langle M,V\rangle$ と文 φ に対し，“φ が $\mathscr{M}$ で成立する”，“$\mathscr{M}$ は φ のモデルである” ということ，すなわち

$$\mathscr{M}\models\varphi$$

を，次のように定義する：

（i）　$\underset{\sim}{P}^{(k)}\in\mathscr{S}$ で，$a_1,a_2,\cdots,a_k\in M$ ならば，

$$\mathscr{M}\models\underset{\sim}{P}^{(k)}(a_1,\cdots,a_k)\iff P^{(k)}_{\mathscr{M}}(a_1,\cdots,a_k)\text{(が成り立つ)}$$

（ii）　$\mathscr{M}\models\neg\varphi\iff\mathscr{M}\not\models\varphi$

（iii）　$\mathscr{M}\models\varphi\vee\psi\iff\mathscr{M}\models\varphi$ または $\mathscr{M}\models\psi$

（iv）　$\mathscr{M}\models\varphi\wedge\psi\iff\mathscr{M}\models\varphi$ かつ $\mathscr{M}\models\psi$

（v）　$\mathscr{M}\models\varphi\to\psi\iff\mathscr{M}\models\varphi$ ならば $\mathscr{M}\models\psi$

（vi）　$\mathscr{M}\models\forall x\varphi(x)\iff$ すべての $a\in M$ について $\mathscr{M}\models\varphi(a)$

（vii）　$\mathscr{M}\models\exists x\varphi(x)\iff$ ある $a\in M$ について $\mathscr{M}\models\varphi(a)$

（viii）　以上によって与えられるときのみ，$\mathscr{M}\models\varphi$ である．

$\mathscr{S}$ が少数の有限個の記号からなるときは，$\mathscr{S}$ の各述語記号を V によって解釈した関係を直接書き表すことが多い．

例 1　$\mathscr{S}=\{\underset{\sim}{P}^{(2)}\}$，$\mathscr{M}=\langle\omega,<\rangle$（$\underset{\sim}{P}^{(2)}$ を $<$ と解釈する）について，

$\mathscr{M}\models\forall x(\underset{\sim}{P}^{(2)}(3,x)\to\underset{\sim}{P}^{(2)}(0,x))$ は “すべての $x\in\omega$ について，$3<x$ ならば $0<x$ である” と解釈されている．

$\mathscr{M}\models\forall x\exists y\underset{\sim}{P}^{(2)}(x,y)$ は “すべての自然数 x に対し，$x<y$ となる自然数 y が存在する” と解釈されている．

また，$\mathscr{M}_1=\langle M,\in\rangle$（$M$ は空でないある集合）とすれば，

$\mathscr{M}_1\models\forall x\exists y\underset{\sim}{P}^{(2)}(x,y)$ は，“M のすべての要素 x に対し，$x\in y$ となる y，すなわち x を要素とする集合 y が M の中にある” と解釈されている．□

φ が $\mathscr{L}(\mathscr{S}, M)$ の文のとき，M を宇宙にもつ**すべての**モデル $\mathscr{M}=\langle M, V\rangle$ に対し $\mathscr{M}\models\varphi$ であれば，φ は**妥当**であるといい，

$$\models\varphi$$

と書く．自由変数をもつ論理式 φ の場合は，φ の**全称閉包** $\forall\varphi$（φ に現れる自由変数をすべて $\forall$ で束縛した閉論理式）が妥当のとき，φ は妥当であるという．

例 2　1）$\varphi=\forall x\, \underset{\sim}{P}^{(1)}(x)\rightarrow\underset{\sim}{P}^{(1)}(y)$ は妥当である．2）$\varphi=\exists y\,\forall x\,\underset{\sim}{P}^{(2)}(x, y)$ は妥当でない．なぜなら，φ が成り立たないモデル——**反例モデル**という——が存在するからである．□

Σ を $\mathscr{L}(\mathscr{S}, M)$ の文のある集合，φ を $\mathscr{L}(\mathscr{S}, M)$ の文とする．このとき

$$\Sigma\vdash\varphi$$

とは，φ が，述語論理の公理と Σ に属するある有限個の文とから，推論規則を有限回施すことによって導かれることである．また，Σ のすべての文が $\mathscr{M}$ で成り立つとき，$\mathscr{M}$ は Σ のモデルであるといい，

$$\mathscr{M}\models\Sigma$$

と書く．これらの状況のもとに，次の定理が成り立つ:

定理 26.1（健全性定理）　$\mathscr{M}\models\Sigma$ かつ $\Sigma\vdash\varphi$ ならば，$\mathscr{M}\models\varphi$ である．特に $\Sigma=\phi$ ととって，

$$\vdash\varphi \quad ならば \quad すべての\ \mathscr{M}\ に対し\ \mathscr{M}\models\varphi$$

すなわち

$$\vdash\varphi \quad ならば \quad \varphi\ は妥当である.$$

（$\vdash\varphi$ は，述語論理の体系で φ が証明可能であることを表す.）

$\Sigma\vdash\varphi$ かつ $\Sigma\vdash\neg\varphi$ となる文 φ が存在しないならば，Σ は**無矛盾**であるという．$\Sigma=\phi$ のときは，述語論理の体系が無矛盾であるという．

系 26.2（無矛盾性定理）　述語論理の体系は無矛盾である．

述語論理の体系は，もし妥当な文が必ず証明可能であれば，**完全**であるという．

定理 26.3（完全性定理；ゲーデル，ヘンキン）

（i）　Σ が無矛盾ならば，Σ はモデルをもつ．

（ii）　φ が妥当ならば，$\vdash\varphi$ である．

系 26.4（コンパクト性定理）　Σ の任意の有限部分集合がモデルをもつならば，Σ 自身がモデルをもつ．

完全性定理とコンパクト性定理は，言語が非可算の場合（$\mathscr{L}(\mathscr{S},\mathscr{C})$ が非可算個の記号を含むこと），その証明に選択公理が必要となる．

なお，等号をもつ述語論理の解釈の際は，**正規モデル**の概念を必要とする．ここでは説明を省くが，［9］に詳しい説明が載っているので，それを参照願いたい．

§27　帰納法による定義

α_0 が無限順序数で，F が α_0 $(=\{\alpha\in \mathrm{OR}:\alpha<\alpha_0\})$ で定義された関数のとき，$\alpha<\alpha_0$ に対し，F の定義域を $\alpha=\{\beta\in\mathrm{OR}:\beta<\alpha\}$ に制限した関数を

$$F\restriction\alpha$$

で表す．F が**関数**であるとは，F がある集合 u, v の直積の部分集合で，一意性条件をみたすことである：

$$\begin{cases} F\subseteq u\times v \\ x\in u\wedge y,y'\in v\wedge\langle x,y\rangle\in F\wedge\langle x,y'\rangle\in F \implies y=y' \end{cases}$$

いま，我々は特に

$$\begin{cases} u\ =\alpha_0 \\ \forall\beta\in\alpha_0\,\exists y\in v\,(\langle\beta,y\rangle\in F) \end{cases}$$

という場合を考えている．$\langle\beta,y\rangle\in F$ のとき，$F(\beta)=y$ と書く．さらに，$G\subseteq\mathfrak{P}(\alpha_0\times v)\times v$ も関数であるとする．以上の状況のもとに，次の定理が成り立つ：

定理 27.1（超限帰納法による定義）　G が与えられたとき，

（1）　$$\forall\alpha<\alpha_0(F(\alpha)=G(F\restriction\alpha))$$

をみたす α_0 上で定義された関数 F がただ一つ存在する．（α_0 までの（超限）帰納法による定義ともいう．）

いまの場合，先に $G\subseteq\mathfrak{P}(\alpha_0\times v)\times v$ が与えられるわけで，そのとき（1）によって関数 $F\subseteq\alpha_0\times v$ が定まるのである．

今度は，順序数でなく一般の集合を考える．

定理 27.2（∈-帰納法による定義）　u は推移的で，$G\subseteq(u\times\mathfrak{P}(u\times v))\times v$ が関数のとき，

（2）　$$\forall x\in u\,(F(x)=G(x,F\restriction x))$$

をみたす u 上で定義された関数 F がただ一つ存在する．

実は，任意の集合 G と任意の集合 x に対し

$$G`x = \begin{cases} \langle x, y\rangle \in G \text{ となる } y & (\exists ! y(\langle x, y\rangle \in G) \text{ のとき}) \\ \phi & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

という記号を導入しておくと，定理 27.1，27.2 で G は勝手な集合としてよい．そのとき，(1), (2) はそれぞれ次のようになる:

(1′)　$$\forall \alpha < \alpha_0 (F`\alpha = G`(F \restriction \alpha))$$

(2′)　$$\forall x \in u (F`x = G`\langle x, F \restriction x\rangle).$$

これらの定理の証明は，たとえば [15; 第3章] を参照されたい．

例 1　$\langle M, \in\rangle$ は ZF の推移モデルで，$\mathbf{1} \in M$ とする．各 $a \in M$ に対し

(3)　$$\check{a} = \{\langle \check{x}, \mathbf{1}\rangle : x \in a\}$$

と定義する．$\check{a}$ の定義は M 上の $\in$-帰納法による定義である．しかし，M はモデルの宇宙であるから，全宇宙にわたる $\in$-帰納法でなければならない．定理 27.1 と 27.2 は，クラス概念を使って，**すべての**順序数についての超限帰納法の場合や，**すべての**集合についての $\in$-帰納法の場合に拡張される．このときは，F はクラスとなる．

さて (3) であるが，M において

$$\langle\langle a, w\rangle, z\rangle \in G \iff z = \{\langle w`x, \mathbf{1}\rangle : x \in a\}$$

なるクラス G が存在する．これに対し

$$\forall a \in M (F`a = G`\langle a, F \restriction a\rangle)$$

なるクラスの関数 F が存在する．この F に対し $F`a = \check{a}$ である．□

§ 28　決定性公理

本節では，選択公理の否定を導く強い公理のお話をする．これはゲーム——無限ゲーム——に関係する問題である．

X を少なくとも 2 要素をもつ集合とし，

$$X^{\omega} = \{f \mid f : \omega \longrightarrow X\}$$

とする．X に離散位相を入れ，X^{ω} を無限直積位相空間として弱位相を入れる (p. 114). X^{ω} の任意の部分集合 A を与える．二人のプレーヤー I と II が I から始めて X の要素を交互に（重複を許して）取り合う．まず，I が $a_0 \in X$ を取る．次に II が $b_0 \in X$ を取り，さらに I が $a_1 \in X$ を，II が $b_1 \in X$ を，…… というように，X の要素を取り合う．これを無限回（ω 回）行なうと，その結果，X の要素の無限列

(1)　$$a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots$$

が得られる．この無限列と，

(2)　$$f(2n) = a_n, \quad f(2n+1) = b_n$$

によって定まる $f\in X^\omega$ とを同一視する．このとき，

$f\in A$ ならプレーヤーＩの勝ち，　$f\notin A$ ならプレーヤーⅡの勝ち

と定める．このゲームを $G(A,X)$ で表す．略して $G(A)$ とも書く．

σ がプレーヤーＩの**策戦**であるとは，プレーが $2n-1$ 手まで進行したとき，次にＩが打つ手 a_n をそれまでⅡがプレーしてきた手の列 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ からきめる一つの関数

（3）　$$\sigma(\langle b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}\rangle) = a_n \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

のことであり，同様にしてプレーヤーⅡの策戦 τ は

（4）　$$\tau(\langle a_0, a_1, \cdots, a_n\rangle) = b_n \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

なる関数である．ただし，（3）で $n=0$ は $\sigma(\langle\ \rangle)=a_0$ であり，$\langle\ \rangle$ は空列を表す．したがって，σ は空列に対しても値が定義されていなければならない．

このとき，もしプレーヤーＩが策戦 σ に従ってプレーを行なえば，プレーヤーⅡがどんな手を打っても（すなわち，Ⅱがどんな策戦 τ を使ったとしても）Ｉが必ず勝つならば，σ はＩの**必勝法**という．Ⅱの必勝法も同様に定義される．

問題Ａ　与えられた $A\subseteq X^\omega$ に対し，ゲーム $G(A)$ で，ＩかⅡのどちらかが必勝法をもつか？

明らかに，ＩとⅡが共に必勝法をもつことはない．問題Ａが肯定されるとき，ゲーム $G(A)$ は（あるいは集合 A は）**決定性**であるという．いろいろな A に対し A が決定性になることが知られているが，全く不明のものもたくさんある．むしろ，不明のものの方が多いのである．

以下では，$X=\omega$ とする．したがって $\omega^\omega=\{f \mid f:\omega\longrightarrow\omega\}$ は，自然数で定義された自然数値関数全体，すなわち無限自然数列全体の集合である．これは，いわゆるベールの零空間として知られる完備距離空間であり，0と1の間の無理数全体の集合とも考えられる．

中へ中へと閉区間を取り合っていくような無限ゲームが，最初バナッハ－マズールによって考案された．1930年代のことである．しかし，しばらく忘れられていた（?）らしく，1953年になってゲール－スチュアートがゲーム $G(A,\omega^\omega)$ を取り上げ，開集合と閉集合が決定性であることを証明した．これが契機となり無限ゲームが関心をもたれ始め研究された結果，今日では決定性の問題はある意味では行きつくところまでいったというのが現状である．すなわち，ボレル集合は決定性である（マーチン（1975））．ボレル集合よりも高い階層の集合（たとえば解析集合）の決定性は ZFC では証明できない（ミッシェルスキー（1964））．しかし，大基数（たとえば可測濃度）の存在を仮定すれば，

解析集合は決定性となる（マーチン（1970）），等々．解析集合より高い階層の集合の決定性は，マーチン，ウッディーン等が研究中で，いくつかの結果が知られている．

ところで，それでは“すべての集合 $A\subseteq\omega^\omega$ が決定性である”と仮定したらどんな結果をもたらすであろうか．ミッシェルスキー等は，この仮定からたいへん興味ある種々の結果を導いた．

AD：　すべての $A\subseteq\omega^\omega$ は決定性である

とおき，**決定性公理**とよぶ．ここでは，選択公理に関係する部分のみを取り扱う．

定理 28.1　AD $\Longrightarrow$ “ω^ω は整列されない”．したがって，AD $\Longrightarrow$ $\neg$AC である．

証明は，選択公理を仮定すると，I も II も必勝法をもたないようなゲーム $G(A,\omega^\omega)$ が存在することを示すことによりなされる．ところが，AD からはある弱い選択公理が導かれる：

定理 28.2　AD を仮定する．ω^ω の空でない部分集合の可算族は選択関数をもつ．すなわち，$\mathscr{F}=\{A_n : n\in\omega\}$ において，$\phi\neq A_n\subseteq\omega^\omega$ であれば，$f(n)\in A_n$（$n=0,1,2,\cdots$）なる関数 f が存在する．

これは，適当なゲームを作って，一方のプレーヤーが必勝法をもたないことを証明する．よって，AD により他方のプレーヤーが必勝法をもつ．この必勝法を用いて族 $\mathscr{F}$ の選択関数を定義することができる，という論法である．このような“可算”選択公理は実数空間（2^ω と考えて）の測度論の展開を容易にするので，ZF＋AD の解析学がかなりうまくいくのである．

実は，ZF＋AD では「ω^ω（または 2^ω）の**すべての**部分集合がルベーグ可測になる」という驚異的な結果が得られる．ベールの性質についても同様である．

以上の内容は証明つきで［13］に紹介してあるので，興味ある読者は参照されたい．

なお，§13 の脚註でふれたように，「すべての実数集合がルベーグ可測である」という命題 LM は ZF と矛盾しないことが知られている．1970 年にソロベイが証明した結果で，文献としてしばしば引用される有名なものである．ただし，「ZFC＋“到達不能基数の存在”の推移 ε-モデルがあるならば」という意味で到達不能基数の存在を仮定しなければならない．そして，“この仮定を除くことはできない”ことが，後にシェラーによって示された．

また，AC を否定する興味ある命題は AD 以外にもあるということを申しそえる［17; p.187］．一般連続体仮説（GCH ≡ すべての無限基数 $\mathfrak{m}$ について，$\mathfrak{m}$ と $2^{\mathfrak{m}}$ の間に基数は存在しない）から AC が導かれることは，1920 年代に知られていた事実である．（補遺 VII を参照）

命題リスト

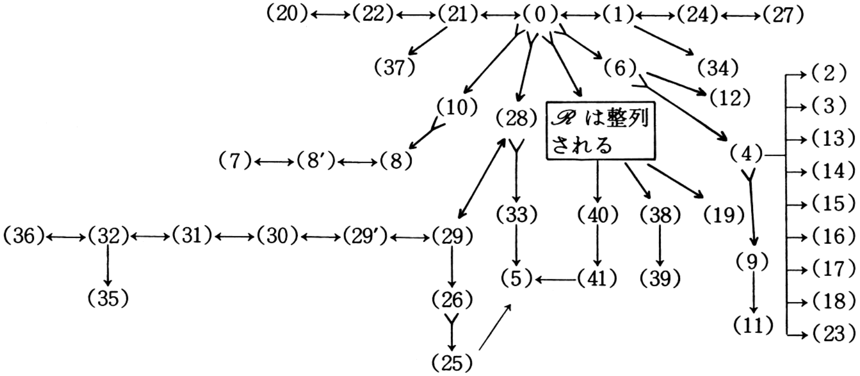
(0) 選択公理（序章）
(1) 整列定理（§8）
(2) 連続関数に関するハイネの定義（13.2）
(3) ルベーグ測度の可算加法性（§13）
(4) 可算選択公理（§5）
(5) 非可測集合の存在（§13）
(6) 従属選択公理（§12）
(7) 可算部分集合定理（無限集合は可算無限集合を含む）(5.1)
(8) デデキント有限集合は有限集合（§14）
(8′) 無限集合は同等な真部分集合を含む（5.2）
(9) 可算和定理（可算集合の可算和は可算集合）(5.3)
(10) 無限基数 $\mathfrak{m}$ に対し $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{m}$（14.3）
(11) 第2級順序数の一性質（14.5）
(12) ウリゾーンの補題（15.1）
(13) 閉包の点列極限による定義の同値性（15.2）
(14) 集積点の点列極限による定義の同値性（15.3）
(15) コンパクト性と点列コンパクト性の同値（15.4）
(16) 可算個の第1類集合の和は第1類集合（15.6）
(17) ボレル集合の分類――階層定理（15.8）
(18) ボレル集合はベールの性質をもつ（15.9）
(19) ベールの性質をもたない集合の存在（15.10）
(20) チコノフの定理（16.1）
(21) ツォルンの補題（16.2）
(22) テューキーの補題（16.3）
(23) 分離的距離空間の部分空間は分離的距離空間（16.5）
(24) ベクトル空間は基底をもつ（17.1）
(25) ハーン-バナッハの拡張定理（17.2）
(26) ハウスドルフ空間に関するチコノフの定理（17.3）
(27) 束の極大イデアル定理（18.3）
(28) ブール代数の素イデアル定理（18.4）
(29) 集合代数の本来のイデアルは素イデアルに拡張される（18.5）
(29′) 集合代数の本来のフィルターは超フィルターに拡張される（18.5の双対形）

(30)　ブール代数の本来のイデアルは素イデアルに拡張される (18.6)
(31)　ストーンの表現定理 (§18)
(32)　コンパクト性定理 (18.10; 26.4)
(33)　極大イデアルの弱定理 (18.7)
(34)　代数的閉包の存在 (と一意性) (18.8)
(35)　アルティン-シュライアーの定理 (18.9)
(36)　述語論理の完全性定理 (26.3)
(37)　極大条件をみたす群の部分群は有限生成的 (§18)
(38)　ハウスドルフの逆理 (19.1)
(39)　バナッハ-タルスキーの逆理 (19.3)
(40)　ハーメル基 (§10 (6))
(41)　$f(x+y)=f(x)+f(y)$ の不連続解の存在 (§10 (7))

ダイヤグラム

選択公理 (AC) と本文に現れた諸命題の関係を図示する.

$P \longrightarrow Q$	ZF で P から Q が導かれる
$P \longleftrightarrow Q$	ZF で P と Q は同値である
$P \rightarrowtail Q$	$P \longrightarrow Q$ しかし $Q \not\longrightarrow P$



補　遺

I. 定理 15.2 の ZF からの独立性

いろいろな定理の証明に選択公理（AC）が使われていることを見てきた．しかしそれらの定理を証明するのに本当に選択公理が必要なのか，すなわちその定理が集合論公理系 ZF から独立なのか，についてはほとんど触れなかった．そこでそのようなものの中から一例を取り上げて，選択公理が真に必要であること，すなわち選択公理を欠くシステム ZF ではその定理が成立しないことを示すことにする．

定理 15.2（p. 103）距離空間 T において，$S \subseteq T$ に対して次の（1），（2）は同値である：

（1）$a \in \overline{S}$（S の閉包），すなわち $\forall U(a)\,[U(a) \cap S \neq \phi]$,

（2）$\exists \{z_n\}\,[z_n \in S \text{ for all } n \in \omega \text{ and } \lim_{n\to\infty} z_n = a]$.

この定理で（1）⇒（2）の証明に選択公理が欠かせないことを証明するのが目的である．定理 25.1 の証明のために作った basic Cohen モデルと呼ばれる N と実数集合 A とをとる．$N \vDash \mathrm{ZF} + \neg \mathrm{AC}$ であった．p. 214 によって

$N \vDash A$ はデデキント有限である　　∴　$N \vDash A$ は可算部分集合を含まない

が成立している．もちろんこの A は無限集合である．

A は集積点をもつ．（証：もし A のすべての点が孤立点ならば，$\{I_n\}$ を有理数の端点をもつすべての開区間とするとき，各 $d \in A$ に $A \cap I_n = \{d\}$ となる最小の番号 n を対応づけることができる．これは A が可算であることを意味するから不合理．）

そこで a を A に属する A の集積点とし，$S = A - \{a\}$ を作る．S も無限かつデデキント有限であり，$a \in \overline{S}$．しかし，$\lim_{n\to\infty} z_n = a$, $z_n \in S$ for all n となる実数列 $\{z_n\}$ は存在しない．なぜなら，もし存在すれば，$z_n \neq a$ for all n だから S が可算部分集合を含んでしまう．不合理．かくて $N \vDash$（1）$\not\Rightarrow$（2）□

これを利用すると，p. 88 定理 13.2 が選択公理を真に必要とすること，すなわち選択公理を欠くシステム ZF では，連続性に関する二つの定義が同値でないこともわかる：

S と a は上のとおりとし，

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in S \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

という実関数 f を考える．$a \notin S$ だから $f(a) = 0$．この f は a で連続でない（∵ a は S の集積点だから，どんな $\delta > 0$ についても a の δ-近傍は S の点 x を含み，したがって $|f(x) - f(a)| \geq 1$）．[1/] しかし，

[1/] p.239 の 6) を参照.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \ (z_n \neq a \text{ for all } n) \quad \text{ならば} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a).$$

なぜなら，かかる数列 $\{z_n\}$ をとると，S は可算部分集合を含まないから，$z_n \in S$ となる n は有限個しかない．よって，あるところから先すべての n に対して $z_n \notin S$．ゆえにかかる n に対して $f(z_n) = 0$．一方 $f(a) = 0$．

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a).$$

これは，選択公理がないと「ε-δ 論法による連続性の定義と，収束数列による連続性の定義とは同値である」という定理が成立しないことを示している．□

II. エフェクティヴ記述集合論（p. 83, ℓ. 18～24 への注意）

「ボレル集合や解析集合は相対化された構成的集合としてかなり明確に把握できる」と書いたが，この場面で“構成的集合”という言葉を使ったのは不適切であった．この用語は今日では使用法がほぼ確定しており，ゲーデルの構成的集合の意味にとるのが普通である．ここで筆者が言いたかったことは，recursion theory の理論に基づくいわゆる“エフェクティヴ記述集合論”である．それはクリーネとアディソンにより開発された理論で，lightface の Δ^1_1-集合，Σ^1_1-集合，Π^1_1-集合を任意の実数で相対化することにより，従来のボレル集合，解析集合，補解析集合，あるいは一般の射影集合を得ることができる，ということである．すなわちエフェクティヴ理論を相対化すると古典理論が得られるのである．のみならず，古典理論にはなかった様々な結果が生まれた．このような内容を含む邦語の成書がないと述べたかったのである（したがって，23 行目 ～ 24 行目の「構成的集合については第 4 章で解説するが，…」という文中の“構成的集合”は 21 行目のそれと意味が異なるので，この 2 行は削除する）．そもそも記述集合論という標題の邦語の本は全くなく，ただ「解析集合論」という近藤先生のモノグラフ [Ko 1938 b] が 1 冊あるだけである．筆者は 1982, 83 年度に立教大学大学院で記述集合論を講義し，いま述べた内容をかなり詳しく語った．そしてこれをまとめて本にする心づもりであったが，諸事情で未だ果していない．現在フリーな立場にあるので，気力が起こればぜひ執筆したいとは思っているが ….

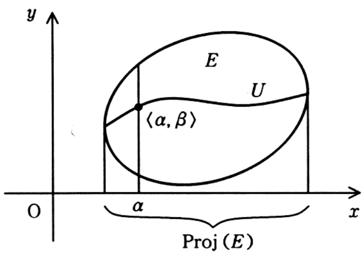
III. 集合の一意化問題（p. 86 の追記への補足）

アダマールが二つの手紙で述べた内容はルージンによって敷衍（ふえん）され，**集合の一意化**の問題としてクローズアップされた [Lu 1930].

E を xy-平面上の点集合とする．$\mathrm{Proj}(E)=\{\alpha : \exists\beta[\langle\alpha,\beta\rangle\in E]\}$ を E の x 軸上への**射影**という．もし y 軸に平行なすべての直線が E と高々 1 点で交わるならば，E は（x 軸に関して）**一意的**（**一様**）であるという．E が**一意化可能**とは

$$\mathrm{Proj}(U) = \mathrm{Proj}(E) \quad かつ \quad U\subseteq E$$

となる一意的集合 U が存在すること．U を E の**一意化集合**，U は E を**一意化する**という．



集合の一意化問題とは，E が与えられたとき U を求めよ，ということである．AC を仮定すれば U の存在は明らかである．問題の本質は，U を具体的に求めること，さらには E の複雑さに応じて E と同程度，あるいはなるべく E の複雑さに近い複雑さの一意化集合 U を求めよ，というところにある．「一様な具体的選択」という内容である．すなわち，切り口をなす集合たちから一様な方法で（キチンと記述できる一定の方法で）一要素ずつ取り出すことができるか，という問題である．

ルージンは [Lu 1930] の中で，E がボレル集合なら補解析集合で一意化できること，一般にボレル集合は解析集合では一意化できないことを証明した．ここで，n 次元空間の**解析集合**とは，$n+1$ 次元空間のボレル集合を n 次元空間へ射影して得られる集合のこと．あるいは，次元に関係なく，ボレル集合の連続像として与えられる集合と言ってもよい．**補解析集合**とは解析集合の補集合のこと．ボレル集合に射影と補演算とをつぎつぎに繰り返し行なって得られる集合を**射影集合**という．今日ではこれらの集合のクラスを次の記号で表す（ここの $\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi}$ は太字であることに注意）：

$$\boldsymbol{\Delta}^1_1\ (\text{ボレル集合}) \subset \begin{array}{l} \boldsymbol{\Sigma}^1_1\ (\text{解析集合}) \subset \boldsymbol{\Sigma}^1_2\ (\text{補解析集合の射影}) \subset \cdots \subset \boldsymbol{\Sigma}^1_n \subset \cdots \\ \boldsymbol{\Pi}^1_1\ (\text{補解析集合}) \subset \boldsymbol{\Pi}^1_2\ (\boldsymbol{\Sigma}^1_2\ \text{集合の補集合}) \subset \cdots \subset \boldsymbol{\Pi}^1_n \subset \cdots \end{array}$$

上の添数 1 は集合の型数（タイプ 1——実数集合）を表し，$\subset$ はクラスの間の真の包含関

係を表す．

さて，ルージン［Lu 1930］は，解析集合は解析集合と補解析集合から和演算・共通集合演算を無限回施すことにより得られる集合によって一意化できると述べ，補解析集合は具体的に定義されるような集合によっては一意化不可能であろうと述べた．これに対して，私の恩師近藤基吉先生は

近藤の一意化定理　補解析集合は補解析集合によって一意化できる；したがって $\mathbf{\Sigma}_2^1$-集合は $\mathbf{\Sigma}_2^1$-集合によって一意化できる（［Ko 1938 a］）．

という結果を得た．これはルージンの予想を覆す画期的な結果で，高く評価された定理である．1950年代後半にアディソンが現代ふうに言い直して，すなわちいわゆるエフェクティヴ版を得て，**Kondo-Addison の定理**としてよく知られるようになった．一時，数学基礎論の問題にしばしば利用された．たとえば，ゲーデルが証明なしに発表した「"非可算補解析集合で完全部分集合を含まないものが存在する" が ZFC と無矛盾である」という結果は近藤の一意化定理を使って証明される．また，ソロベイの「完全集合を含む $\mathbf{\Sigma}_2^1$-集合の特徴づけの定理」やショーンフィールドの有名な「lightface Σ_2^1-集合の絶対性定理」の証明，モストウスキーの β モデルの理論などには Kondo-Addison 版が用いられる．このように有用なので，集合論の専門書には必ず載っている定理である．筆者もこの定理を利用してある結果を得ることができた．

先のルージンによる解析集合の一意化問題については，その後もう少しはっきりした形の一意化集合を得ることができることがわかったが，それよりもさらにスッキリした形

「解析集合は二つの解析集合の差で表される集合で一意化できるか？」

が問題となり，これは近藤研究室の主要研究テーマのひとつとなった．筆者は1977年に二度目の海外出張を認められ，UCLA（カリフォルニア大学ロサンゼルス校）の数学教室へ出かけた．3月末のある日ロスに到着し，翌朝モシュコヴァキスに連絡をとった．彼は現代的記述集合論の第一人者である．彼はホテルへ迎えに来て筆者を乗せてアパートメント探しを手伝ってくれたのである．昼時になりビュッフェふうの店に入りランチを取りながらの会話中，筆者が前述の問題のことを話題にすると，彼はすかさず「それはつい先日スチールとマーチンが解いた，反例を見つけたのだ」と言う．これには筆者ビックリ．長年考え続けていた問題が，アメリカへ着いた途端にすでに解かれたというニュース．少なからぬショックを受けてしまった．我々は，うまくやればできるはずだと肯定面のみを追求していたため，遅れをとったのだった．モシュコヴァキスはちょっと考えながら概要を紙に書いてくれた．使っていた道具や手法は recursion-theoretic な

もので筆者もよく知っている馴染みのものであっただけに，発想の転換が必要であることを痛感した次第である．興味ある読者は［Mo 1980; p.267］を参照されたい．

なお，$\mathbf{\Pi}^1_2$-集合およびレベル3以上の射影集合の一意化問題は通常の集合論の範囲では不可能であることが証明され（レヴィ），したがって肯定的結果を得るためには何らかの仮定が必要になる．ゲーデルの構成可能性公理 $V=L$ のもとで解くことができるが，その結果はやや不自然な形である．そこで $V=L$ とは異なる仮定を考えることになる．これに対してモシュコヴァキスは無限ゲーム理論の**射影決定性公理**（これは $V=L$ と衝突する公理である）のもとで，射影集合に対するリーゾナブルな一意化定理を得た．興味ある読者は，概略は筆者の［14］を，詳細については上記モシュコヴァキスの本をそれぞれ参照されたい．

Ⅳ．「ベールのカテゴリー定理」について（p.107-8）

定理 15.5′ に関して，この定理の証明には選択公理は不要であると書いた（p.108）．これは空間が実数空間だからである．一般の完備距離空間の場合には**選択公理が必要**である．なお，ベールのカテゴリー定理は次の形で書いてある本も多い：

ベールのカテゴリー定理　完備距離空間の稠密開集合たちの可算列の共通集合は稠密である．

距離空間 T が完備とは，T の任意のコーシー列が収束することである．この形で書いてある本なら何でもよい，その証明をご覧いただきたい．近傍を小さくしながら，一点ずつ点を選んでいることに気づかれるであろう．そこに選択公理の必要性が生ずる．実は「この形のベールのカテゴリー定理は従属選択の公理と同値である」ことが知られている．この定理の表現は他にもある．たとえば［HR 1998; p.121］を参照．

V. ハーン・バナッハの拡張定理の証明への補足（p. 130）

（i）ℓ.2. このとき（20）なる f_1 は（19）$f_1(y) \le g(y)$ をみたす.

証明　$y = w + \alpha x_1$, $w \in W$, $\alpha \in \mathscr{R}$ とする.

(a) $\alpha > 0$: $\dfrac{1}{\alpha} y = \dfrac{1}{\alpha} w + x_1$.

$$\therefore \ f_1\left(\frac{1}{\alpha} y\right) = f_1\left(\frac{1}{\alpha} w + x_1\right) = f\left(\frac{1}{\alpha} w\right) + \beta_1 \le g\left(\frac{1}{\alpha} w + x_1\right)$$

〔$\because$ $\beta_1 \le g(u + x_1) - f(u)$, $u \in W$ において $u = \dfrac{1}{\alpha} w$ ととればよい.〕

$$\begin{aligned}\therefore \ f_1(y) &= f(w) + \alpha\beta_1 = \alpha\left(\frac{1}{\alpha} f(w) + \beta_1\right) = \alpha\left(f\left(\frac{1}{\alpha} w\right) + \beta_1\right) \\ &\le \alpha g\left(\frac{1}{\alpha} w + x_1\right) = g(w + \alpha x_1) \qquad (\because \ \alpha > 0) \\ &= g(y).\end{aligned}$$

(b) $\alpha = 0$: 明らか.

(c) $\alpha < 0$: $\alpha = -\alpha'$ とおけば $\alpha' > 0$. あとは（a）に倣（なら）う. □

（ii）ℓ.5〜9 ; ℓ.17. f^*（X に依存するので f^*_X と書く）の構成を再述しながら次の性質を導こう：

$$X_1, X_2 \in Z, \ x \in X_1 \frown X_2 \implies \varphi_0(X_1)(x) = \varphi_0(X_2)(x).$$

$x_1 \in X_1 \frown X_2$ とする. $x_1 \in W$ のときは $f^*_{X_1}(x_1) = f^*_{X_2}(x_1) = f(x_1)$.

$x_1 \notin W$ のとき,［W, x_1］を考え, $\beta_1 = \inf\limits_{u \in W} \{g(u + x_1) - f(u)\}$ ととって $y = w + \alpha x_1$ に対して（ただし $w \in W$）

$$f_{1, X_1}(y) \underset{\text{def}}{=} f(w) + \alpha\beta_1 \underset{\text{def}}{=} f_{1, X_2}(y).$$

さらに $x_2 \in X_1 \frown X_2 - [W, x_1]$ ならば［W, x_1, x_2］を考えて

$$\beta_2 = \inf_{u \in [W, x_1]} \{g(u + x_1) - \underset{\substack{\shortparallel \\ f_{1, X_2}(u) \quad (\because \ u \in [W, x_1])}}{f_{1, X_1}(u)}\} \text{ ととって, } y = w_1 + \alpha x_2 \text{ に対して}$$

（ただし今度は $w_1 \in [W, x_1]$ とする）

$$f_{2, X_1}(y) \underset{\text{def}}{=} \underset{\substack{\shortparallel \\ f_{1, X_2}(w_1)}}{f_{1, X_1}(w_1)} + \alpha\beta_2 \underset{\text{def}}{=} f_{2, X_2}(y).$$

以下同様に進む. このようにして有限回で $f^*_{X_1}$, $f^*_{X_2}$ が構成される. したがって

$$x \in X_1 \frown X_2 \implies f^*_{X_1}(x) = f^*_{X_2}(x)$$

$$\therefore \quad x \in X_1 \cap X_2 \implies \varphi_0(X_1)(x) = \varphi_0(X_2)(x). \qquad \square$$

VI. コンパクト性定理の名前の由来

コンパクト性定理「Σ を第1階述語論理の言語における閉論理式の一つの集合とする．もし Σ の任意の有限部分集合がモデルをもてば，Σ 自身がモデルをもつ」(p. 139) の名前の由来について述べる．定理の記述がコンパクト性の定義に似ているからこの名前がつけられたのであろうと思いがちであるが，真相は

「コンパクト性定理は“ある位相空間がコンパクトである”ことを意味する」

ということにあるのである．以下でこれを示そう．

T を第1階述語論理の言語における閉論理式全体の集合とする．各 $\varphi \in T$ に対して

$$\mathrm{Con}(\varphi) = \{\theta : \varphi \vdash \theta\}$$

とし，$\mathscr{B} = \{\mathrm{Con}(\varphi) : \varphi \in T\}$ を開集合の基として T に位相を入れる．それが可能なことは次の3者から従う：（i）$T = \mathrm{Con}(\varphi \wedge \neg\varphi) \in \mathscr{B}$，（ii）$\varphi \in \mathrm{Con}(\varphi)$，（iii）$\mathrm{Con}(\varphi_1) \cap \mathrm{Con}(\varphi_2) = \mathrm{Con}(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in \mathscr{B}$．〔(iii) の証明：$\theta \in \mathrm{Con}(\varphi_1) \cap \mathrm{Con}(\varphi_2)$ iff $\varphi_1 \vdash \theta$ and $\varphi_2 \vdash \theta$ iff $\vdash \varphi_1 \to \theta$ and $\vdash \varphi_2 \to \theta$ iff $\vdash (\varphi_1 \to \theta) \wedge (\varphi_2 \to \theta)$ iff $\vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \theta$ iff $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \theta$．このような演繹算法の詳細は［Ta 1997］の第4章を参照.〕 このとき

位相空間 T はコンパクトである．

証明　G を T の任意の開被覆とする．G に属する開集合はすべて基開集合であるとしてよい．よって，

$$G = \mathrm{Con}(\Sigma) \underset{\mathrm{def}}{=} \{\mathrm{Con}(\varphi) : \varphi \in \Sigma\}$$

となる $\Sigma \subseteq T$ が存在する．$\cup G \supseteq T$ だから，$\cup G$ は矛盾集合，したがってそれはモデルをもたない．ゆえにコンパクト性定理により，$\cup G$ のある有限部分集合がモデルをもたない．したがって，G のある有限個の $\mathrm{Con}(\varphi_1), \mathrm{Con}(\varphi_2), \cdots, \mathrm{Con}(\varphi_n)$ があって，その和集合 $\mathrm{Con}(\varphi_1) \cup \mathrm{Con}(\varphi_2) \cup \cdots \cup \mathrm{Con}(\varphi_n)$ がモデルをもたないことになる．ゆえに $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ は矛盾集合で，したがって $\{\mathrm{Con}(\varphi_1), \mathrm{Con}(\varphi_2), \cdots, \mathrm{Con}(\varphi_n)\}$ は T に対する G の有限部分被覆である．$\square$

注意1　T への位相として $\{m(\varphi) : \varphi \in T\}$ を開基底にとってもよい．ただし，

$$m(\varphi) = \{\ \theta \in T : \forall \text{モデル} M\,[M \vDash \varphi \Rightarrow M \vDash \theta]\}$$
$$= \{\ \theta \in T : \forall \text{モデル} M\,[M \vDash \varphi \to \theta]\}$$

である．しかし実は，述語論理の完全性定理と演繹定理（たとえば上掲［Ta 1997］参

照）により，両者は同じ位相であることがわかる. □

注意 2 第 1 階述語論理の体系は，述語記号・定数記号を非可算個含んでもよい. これらが可算個の体系に対しては，コンパクト性定理は選択公理なしに証明される. □

VII. 「一般連続体仮説 ⇒ 選択公理」の証明 (p. 223)

一般連続体仮説とは

(1) “無限基数 κ, λ に対して，$\kappa \leq \lambda \leq 2^\kappa \Rightarrow \lambda = \kappa$ or $\lambda = 2^\kappa$”

である．ところで,

(2) “任意の無限基数 κ に対して $\kappa = \kappa^2$” ならば，AC が成り立つ [15; p. 131].

また，選択公理を使わないで次の結果が証明される：

(3) 無限基数 κ に対して $2^\kappa \not\leq \kappa^2$

ここで (2) と (3) を承認すれば，“(1) ⇒ AC” は以下のように証明される：

(1) から (2) の前提を導けばよい．そこで，任意に無限基数 κ をとると $\kappa \leq 2\kappa \leq 2^\kappa$. $2\kappa \leq \kappa^2$ だから (3) によって $2\kappa \neq 2^\kappa$. ゆえに $\kappa \leq 2\kappa < 2^\kappa$, したがって (1) により $2\kappa = \kappa$. ∴ $\kappa^2 \leq (2^\kappa)^2 = 2^{2\kappa} = 2^\kappa$. また (3) より $\kappa^2 \neq 2^\kappa$. したがって $\kappa^2 < 2^\kappa$. ∴ $\kappa \leq \kappa^2 < 2^\kappa$. これより (1) を用いて，$\kappa = \kappa^2$ がいえた．(3) の証明は [5; p. 160] を参照されたい. □

VIII. ツェルメロについて

ツェルメロについては 1871 年に生まれて，1953 年に死去した数学者；選択公理を見つけて，それを使って整列定理を証明した；集合論の公理系を初めて作った人；物理学も研究した，という程度のことしか筆者は知らなかったが，6 年ほど前に本橋信義氏から『ゲーデルを語る』(遊星社) という翻訳書 [MM 1992] を戴いて，その中にツェルメロの記事を見いだした．ツェルメロがゲーデルと不完全性定理をめぐって論争したという．多少の驚きをもってたいへん興味深く読ませていただいた．その後，文献 [Dr 1991] を知り，その中の J. W. Dawson, Jr. の論説 “The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems” にツェルメロの反論についての記述があって，状況を知ることができた．選択公理とはあまり関係ないが，ツェルメロに関することという理由でここに述べる.

ゲーデルの不完全性定理は 1931 年 1 月に出版されたが，結果はそれ以前にすでに広がり始めていたという．同年初秋，バート・エルスターでの学会に出席したツェルメロ

は講演でスコーレム主義——すべての数学理論が可算モデルで実現可能という主義；ツェルメロはこれをリシャールの逆理の具体的表現と考えた——を手厳しくこき下ろした．この学会でゲーデルに会っていろいろ議論したらしい．ツェルメロはその前まで神経衰弱に悩まされ，また短気な性格であったという．この学会での講演の様子から想像すると，だいぶアグレッシヴな人であったかもしれない．学会のすぐ後ゲーデルに手紙を書き，ゲーデルの議論に本質的な欠陥があると言ってきた．ゲーデルは不完全性定理の証明を忍耐強く説明し，形式的体系内では truth-definition が不可能であることを注意してやった．ツェルメロは感謝の手紙を書き，言わんとしていることがよりよく理解できたと書いたが，出版された報告文では，ゲーデルが syntax と semantics を区別して論じていることをなおも見落としてしまった，ということである．これはツェルメロの多少の異常さが自分の思い込みを深めさせ，そうさせたのかもしれない．

では，カントルとツェルメロとはどんな係わり合いをもっていたであろうか．残念ながら筆者にはその手掛かりになるものをほとんど知らないので何とも言うことができない．ただ一つ，「カントルの手紙」という本［MN 1991］にツェルメロからカントル宛の手紙（1908年7月24日付）の内容の一部分が載っているのを知るのみである．これはローマで開催された第3回国際数学者会議におけるポアンカレの講演（数学の将来）に係わるものである：

> 「… ポアンカレが決して姿を現さなかったことおよび自分の講演の内容を他のものから取ってくるということは彼の習慣である．また彼は講演推敲のためにあまり努力しないように見える．そのことは彼の近くの友人を除けば一般に認めるだろう．だから，人はカントル主義についてのあまり正しくない注釈をもつことになるだろう．それは私には攻撃よりも退却になるように見える …」

と．カントルからツェルメロへの手紙についてはたぶんいくつかあるとは思うが筆者は知らない．しかし，カントルからヒルベルトへの手紙（多数ある）の中の3通にツェルメロの名が見える．すでに1904年2月12日付の手紙にツェルメロのあの論文［57］に対するお礼の言葉がある．したがって，カントルはヒルベルトから別刷か何かをいち早く送ってもらってツェルメロの（選択公理による整列定理の）証明を知ったわけである．1907年8月8日の手紙には「ツェルメロ氏が集合論を成功裏に研究しているのは私にとって嬉しいことです．貴方から彼によろしく伝えて下さい」とある．1908年のツェルメロの集合論公理系の論文出版に先だってすでにツェルメロのこの方面の研究が伝わっていたに違いないところである．

IX. 連続体仮説の独立性 (p. 195)

連続体仮説 (CH) と選択公理は，本文 p. 168 の構成可能性公理 $V=L$ から導かれる．そして $V=L$ は ZF と無矛盾であるから，結局連続体仮説は ZFC と無矛盾であることがわかる．$V=L \Rightarrow$ CH の証明は少し手間がかかるが，筆者の [15] に詳しい証明が紹介してある．連続体仮説の独立性については本文 p. 195 で触れ，その証明は [9] を引用した．[9] の訳者解説で筆者が証明のかなりの部分を書いたのであるが，この本は絶版になってしまった．それで，ここに連続体仮説の独立性の証明を紹介する．しかし，十分な証明を与えるにはスペースが足りないので，他の文献を引用しながら大筋を述べることになるであろう．

まず，“x が順序数である”（Ord (x) と記す）という概念は絶対的であるから，$M_1 \subseteq M_2$ なる推移モデルに対して，$\alpha \in M_1$ ならば，

$$\mathrm{Ord}^{M_1}(\alpha) \iff \mathrm{Ord}(\alpha) \iff \mathrm{Ord}^{M_2}(\alpha)$$

([15 ; p. 141, pp. 145−148] を参照) したがって，

$$\mathrm{Ord}^{M_1} \subseteq \mathrm{Ord}^{M_2} \tag{1}$$

である．以下，本文 p. 174 のモデル M（基礎モデル），M から作られたブール代数値モデル $M^{(B)}$ (p. 175) および生成的拡大モデル $M[G]$ (p. 191) を考える．このとき

補題 1 $$\mathrm{Ord}^{M} = \mathrm{Ord}^{M[G]}$$

証明 (1) により逆の包含関係を示せばよい．任意の $x \in M^{(B)}$ に対して，B-階数 $\rho(x)$ についての帰納法で $\mathrm{rank}\,(i_G(x)) \leq \rho(x)$ ($\in \mathrm{Ord}^M$) を証明できる．ゆえに，任意の $z \in M[G]$ に対して $\mathrm{rank}\,(z) \in \mathrm{Ord}^M$．特に $\alpha \in \mathrm{Ord}^{M[G]}$ ならば $\alpha = \mathrm{rank}\,(\alpha) \in \mathrm{Ord}^M$．$\therefore\ \mathrm{Ord}^{M[G]} \subseteq \mathrm{Ord}^M$．□

さて，連続体仮説 (CH) : $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ の独立性とは，¬CH が ZFC と矛盾しないこと，あるいは CH が ZFC で証明できないことである．よって，

$$M[G] \vDash \mathrm{ZFC} \quad \text{しかし} \quad M[G] \nvDash \mathrm{CH}$$

となるようなブール代数 B（あるいは強制概念 P）を見つければよい．ここで，G は B 上の M-生成的超フィルター (p. 189)（あるいは P 上の M-生成的フィルター (p. 203) ; p. 203−204 の 1°), 2°) をみたす G_1 を P 上のフィルターと呼ぶ）である．

連続体仮説は基数に関する問題である．だから，モデル M からモデル $M[G]$ へ移行する際に基数が変わってしまっては困る．上で見たように，順序数は移行しても変わらなかった．しかし“基数である (Card)”という概念は絶対的でなく，移行に際し変わることがあるのである．すなわち，ある P を選ぶと，P 上の M-生成的フィルター G に対

して，M での $\aleph_1$ が $M[G]$ では可算集合となり，基数ではなくなってしまう．そこで，基数の概念が移行によって変化しないような P（あるいは B）を選ばなくてはならない．

さて一般に，基数は順序数であるから，基数に関する議論は順序数の中の議論になる．よって上で見たように，$M[G]$ の基数は M の順序数内で考えればよい．そこで，任意の $\alpha \in \mathrm{Ord}^M$ をとる．“基数でない（$\neg$Card）”という概念は Σ_1-形（$\exists f[\cdots]$ という形の論理式のこと．ここで … は Δ-形の論理式）であるから，

$$M \vDash \neg\mathrm{Card}(\alpha) \quad \text{ならば} \quad M[G] \vDash \neg\mathrm{Card}(\alpha)$$

（Δ-形とその意義については［15；§5.3］を参照．）これの対偶をとれば

$$\therefore\ \mathrm{Card}^{M[G]} \subseteq \mathrm{Card}^M \qquad (*)$$

となる．そして，（*）は P や完備ブール代数 B が何であっても成立する．

問題は逆の包含関係である．

定義 2　強制概念 P において，任意の 2 要素 p, q に対して $r \leq p$, $r \leq q$ となる $r \in P$ が存在しないとき，p, q は**不両立**であるという．P の部分集合 D の任意の 2 要素が不両立であるとき，D は**全不両立**であるという．P の全不両立部分集合が必ず可算集合であるとき，P は（正確には，$\langle P, \leq \rangle$ は）**可算鎖条件**（c.c.c. と略記する）をみたすという．

補題 3　P が c.c.c. をみたすならば，G を P における M-生成的フィルターとするとき（*）の逆向き包含関係が成立し，したがって

$$\mathrm{Card}^M = \mathrm{Card}^{M[G]}.$$

証明は p. 245 を参照.

さて，P を特定する段階に到達した．$\kappa = \aleph_2$ とおき，

定義 4　$P = \{p \mid p : \mathrm{dom}(p) \longrightarrow 2,\ \mathrm{dom}(p)$ は $\omega \times \kappa$ の有限部分集合$\}$

$$p \leq q \iff p \supseteq q \ \text{（集合としての包含関係）for } p, q \in P$$

と定める．

補題 5　この $\langle P, \leq \rangle$ は c.c.c. をみたす．

証明　$D \subseteq P$ を全不両立かつ非可算と仮定する．各自然数 n に対して

$$D_n = \{p \in D : |\mathrm{dom}(p)| \leq n\}$$

とおく．$D = \bigcup\{D_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ であるから，少なくとも一つの D_n は非可算である．（ここで AC を使ったが，我々の基礎モデルでは AC が成立するのでさしつかえない．）さらに，$\{p \in D_n : p < q\}$ が非可算であるような q たちのうち $|\mathrm{dom}(q)|$ が最大

のものを q_0 とし，$D_n' = \{p \in D_n : p < q_0\}$ とおく．

任意に $p_0 \in D_n'$ をとる．$p_0 \supset q_0$ であるから，$\mathrm{dom}(p_0) - \mathrm{dom}(q_0) = \{a_1, \cdots, a_r\}$ とする．

$$\{p \in D_n', p \neq p_0\} \quad \text{ならば} \quad \{q_0 \subset p \text{ and } p \text{ と } p_0 \text{ は不両立}\}$$

であるから，このような各 p に対して，$a_i \in \mathrm{dom}(p)$, $p(a_i) = 1 - p_0(a_i)$ となる a_i がある．よって，$i = 1, \cdots, r$ に対して

$$D_n^i = \{p \in D_n' : a_i \in \mathrm{dom}(p),\ p(a_i) = 1 - p_0(a_i)\}$$

とすれば，$D_n' = D_n^1 \cup \cdots \cup D_n^r \cup \{p_0\}$ であるから，少なくとも一つの D_n^i は非可算である．これに対して

$$q_1 = q_0 \cup \{\langle a_i, 1 - p_0(a_i)\rangle\}$$

を作れば，$D_n^i \subseteq \{p \in D_n' : p < q_1\}$．よって，後者は非可算．しかし，$|\mathrm{dom}(q_0)| < |\mathrm{dom}(q_1)|$ だから，q_0 の選び方に反する．□

G を定義4の強制概念 P における M-生成的フィルターとし，$f = \cup G$ とする．

A）$f : \omega \times \kappa \longrightarrow 2$ である．

証明　a）$\langle\langle n, \alpha\rangle, 0\rangle, \langle\langle n, \alpha\rangle, 1\rangle \in f$ とする．$p(n, \alpha) = 0$, $q(n, \alpha) = 1$ なる $p, q \in G$ が存在する．G はフィルターだから，$r \leq p$, $r \leq q$ なる $r \in G$ がある．ゆえに $r(n, \alpha) = 0$ かつ $r(n, \alpha) = 1$．不合理．よって，f は関数である．b）$\mathrm{dom}(f) = \omega \times \kappa$. ∵　任意の $\langle n, \alpha\rangle \in \omega \times \kappa$ をとる．$D_{n,\alpha} = \{p \in P \mid \langle n, \alpha\rangle \in \mathrm{dom}(p)\} \in M$ は P で稠密であるから，$G \cap D_{n,\alpha} \ni p$ をとる．$p \subset f$. ∴ $\langle n, \alpha\rangle \in \mathrm{dom}(f)$.」

B）$f \notin M$.

証明　任意に $g : \omega \times \kappa \longrightarrow 2$, $g \in M$ をとる．$D_g = \{p : p \nsubseteq q\} \in M$ かつ D_g は稠密．よって $p \in G \cap D_g$ をとれば，$p \nsubseteq q$, $p \subset f$. ∴ $f \neq g$. g は任意だから，$f \notin M$.」

C）各 $\alpha < \kappa$ に対して，$f_\alpha : \omega \longrightarrow 2$, $f_\alpha(n) = f(n, \alpha)$ とする．

(a)　$f_\alpha \notin M$.　　　(b)　$\alpha \neq \beta \implies f_\alpha \neq f_\beta$.

証明　(a)　B）の証明とほとんど同じ．

(b)　$D = \{p \in P \mid p(n, \alpha) \neq p(n, \beta) \text{ for some } n\} \in M$ かつ稠密．よって $p \in G \cap D$ をとれば，$p \subseteq f$. ∴ $f(n, \alpha) \neq f(n, \beta)$ for some n.」

A）～C）により，$\alpha \longmapsto f_\alpha$ は κ^M からベキ集合 $(2^\omega)^{M[G]}$ の中への1対1写像．ゆえに $\kappa^M \leq (2^{\aleph_0})^{M[G]}$.

基数が M と $M[G]$ で変わらないから，以上をまとめると次の定理を得る：

定理6　G を定義4の強制概念 P における M-生成的フィルターとする．このとき，

$$M[G] \vDash 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2.$$

したがって，連続体仮説は集合論公理系 ZFC と独立である．

実はこの定理で，$\geq$ を $=$ で置き換えることができるのであるが，証明は省く．さらに，κ は条件 "$\kappa^{\aleph_0}=\kappa$" をみたす M の基数ならば何でもよい．したがって，連続体の濃度はいくらでも大きいと設定しても ZFC と矛盾しないのである．これは実数全体（あるいは，任意の区間でもよい）の濃度がカントルが予想したような単純なものではなく，たいへん複雑な様相のものであることを示すもので，世の中にはわからないものがいろいろあるものだということを実感させられる．

X. 文献の補足

文献の補足をしながら，最近の結果にも触れよう：最近2冊の本 [HR 1998]，[DL 1998] が出版された．前者は選択公理に関する諸結果の集大成である．AC と同値な形，弱い形，弱いいろいろな形に同値な命題，どのモデルで何が成立し，何が成立しないか，etc. が大量に掲載されている．また，後者の中の

De La Cruz, O., and Di Prisco, C. A., Weak forms of the axiom of choice and partitions of infinite sets, 47−70

も同じ傾向の論文であるが，規模ははるかに小さい．前者には証明は部分的に Notes の項にある．後者にも説明や証明がある．

選択公理を使って証明されるお馴染みの定理が ZF から独立である，という結果，すなわち AC なしには証明できないものであるという結果はかなり以前に得られてしまった．したがって，最近の選択公理に関する仕事は集合論関係の人々を除けばあまり興味をひくものではないと思う．たとえば，

ZF $\vdash$ AC $\Rightarrow$ DO $\Rightarrow$ O，しかし逆は ZF で証明不可能（Gonzalez, 1995）

ZF $\vdash$ AC $\Rightarrow$ KW $\Rightarrow$ DO，しかし逆は ZF で証明不可能（Pincus, 1997）

というような結果がある．ここで，

O（順序づけ原理（Ordering Principle））：任意の集合は線形順序づけられる．

DO（稠密順序づけ原理（Dense Linear Ordering Principle））：任意の無限集合は稠密に線形順序づけられる．

KW（Kinna-Wagner 原理）：任意の集合はある順序数のベキ集合の中へ1対1に

埋め込むことができる.

ごく最近出版された論文を一つあげる：

Felgner, U. and Truss, J. K., The independence of the prime ideal theorem from the order-extension principle, *J. Symbolic Logic*, **64** (No.1) (1999), 199−215.

また，選択公理に関する邦人の仕事としては塚田信高氏の論文がいくつかある．その中の一つをあげる．この結果は [HR 1998] に引用されている：

Tsukada, N., Cardinals and the Boolean prime ideal theorem, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku* Sect. A **13** (1977), 276−283.

注

1) p.70 への注：ここは，カントル集合は連続の濃度をもつ測度 0 の集合である．よってその各部分集合は測度 0 で，しかもそれら全体は連続の濃度より大きい濃度の集合を作る．しかしボレル集合たち全体の集合は連続の濃度なので，ボレルでない可測集合が存在する，という議論を指す.

2) p.110 への注:「階層」という言葉はホワイトヘッド・ラッセルの Principia Mathematica (1910) に「タイプの階層」として用いられているが,「複雑さ」と絡めて現れたのはルベーグの 1918 年の論文が最初であろう.

3) p.157 への注：ラッセルの逆理はツェルメロがラッセルの発見 (1901 年 6 月) より前にすでに見つけていた (1899 年). このことはツェルメロが [58, p.119] の脚注に簡単に書いているが，1970 年代に発見された資料により，これは事実であることが判明した.

4) p.173 への注：もし**集合** a があって，$a \models$ ZF が ZF で証明されるならば，ZF 内で ZF の無矛盾性が証明されたことになるが，このようなことはゲーデルの第二不完全性定理により，起こりえない.

5) p.174 への注：「L は ZFC のモデルであるから，レーヴェンハイム-スコーレムの定理により可算モデルがある」としてよいのではないか，と考える向きもあるかも知れないが，それは不可．レーヴェンハイム-スコーレムの定理は**集合としてのモデル**の存在が前提であるのに，L は真のクラスであるから，ここでは利用できないのである.

6) p.227 への注：この書き方は一見選択公理に依存するように見えるので，カッコ内を以下のように改める：もし f が a で連続ならば，$\forall x \in U(a;\delta)\,|f(x) - f(a)| < 1/2$ となる $\delta > 0$ がある．a は S の集積点だから，この δ に対し $x_0 \in U(a;\delta) \wedge x_0 \in S \cdots ⊛$ なる x_0 がある．しかし，$f(a) = 0$, $f(x_0) = 0$ or 1 だから，$f(x_0) = 0$. $\therefore$ $x_0 \notin S$. これは ⊛ と矛盾する.

補遺への追加

XI. 超関数でない線形汎関数

筆者は工学部および大学院工学研究科に在職していたので，δ-関数を教える機会が何度かあった．その際，超関数にも触れることになる．ご承知のように，超関数は $C_0^\infty(\mathscr{R})$ 上で定義され（$\mathscr{R}$ は実数全体の集合），その擬似位相に関し連続な線形汎関数である．微分積分学で連続関数を教えるとき，その例をあげると同時に不連続関数の例も示すのが普通である．したがって超関数を教えるときにも，その例の後で不連続な線形汎関数の例を示したくなってハタと困った．調べるとこれについて，L. シュワルツの『物理数学の方法』には“選択公理を用いてその存在を証明できる”と書いてあった．しかし，筆者が見た限りの成書には，外国の文献も含めて，その証明は載っていない．数学基礎論屋としては選択公理が係わっている問題なので一応その証明をはっきりさせておきたい，とその証明を試みたところ，上記の試料関数空間 (test function space) $C_0^\infty(\mathscr{R})$ に選択公理を使って一種のハーメル基を導入すれば，かかる汎関数を構成できることがわかった．以下でそれを詳述する．

なお，§2 は早稲田大学理工学部の江田勝哉氏との会話がヒントになっているので同氏に感謝の意を表する．

§1　不連続な線形汎関数

$\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathscr{R})$ とは，φ が任意回微分可能で，その台 $\mathrm{supp}(\varphi) = \mathrm{Closure\ of}\ \{x \in \mathscr{R} : \varphi(x) \neq 0\}$ がコンパクトであること．簡単のため以下では $\mathscr{D} = C_0^\infty(\mathscr{R})$ と略記し

$$T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{R}$$

なる汎関数 T を考える．さらに，任意の $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$，$a, b \in \mathscr{R}$ に対して

$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi)$$

が成り立つならば，T は**線形汎関数**である．

T が**連続**とは

$$\text{(1)} \qquad \forall\{\varphi_n\} \subseteq \mathscr{D} \left[\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = 0\right]$$

が成り立つこと．またもし

$$\text{(2)} \qquad \forall\{\varphi_n\} \subseteq \mathscr{D} \left[\forall k \geq 0 \left[\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(k)} = 0\right] \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = 0\right]$$

が成り立つならば，T を**擬連続**と呼んでおこう．

ここで関数列の収束は一様収束の意とする．(2) では k ごとの一様収束である．

明らかに，T が連続ならばそれは擬連続である．そうすると，**超関数**とは擬連続な線形汎関数ということになる．

例 1．不連続な線形汎関数の例：

$$T_0(\varphi) = \varphi'(0).$$

線形性は明らか．不連続性：

$$\theta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\theta_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)\,\theta(x) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

と定義すれば，$\theta_n \in \mathscr{D}$ for all $n \geq 1$．このとき $\theta'(0) = 0$ であるから

$$\theta_n'(0) = \left[\cos(nx)\,\theta(x) + \frac{1}{n}\sin(nx)\,\theta'(x)\right](0) = e^{-1}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0 \quad \text{but} \quad \lim_{n\to\infty} T_0(\theta_n) = \lim_{n\to\infty} \theta_n'(0) = e^{-1} \neq 0$$

よって，T_0 は**不連続な**線形汎関数である．そしてこの証明には選択公理など必要としない．また，明らかに T_0 は擬連続である．□

§2　超関数でない線形汎関数

本節では超関数でない線形汎関数，すなわち擬連続でない線形汎関数の実例を**選択公理を仮定して**作る．

$\varphi_0(x) \equiv 0$ とし，正の整数 n に対して

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} x^n \theta(x)$$

とすれば，$\varphi_n \in \mathscr{D}$ for all $n \geq 0$.

♯　選択公理によって $\mathscr{D}$ の全メンバーを整列させて

$$\{\varphi_\alpha(x) \,|\, \alpha < \kappa\} \qquad \cdots\cdots①$$

とする．ここで κ は $\mathscr{D}$ の濃度(実は連続の濃度)．さらに①の始切片が

$$\{\varphi_n \,|\, n < \omega\}$$

であるようにしておく．$\mathscr{D}$ に対する一種のハーメル基 $\mathscr{H}$ を次のように定義する：

Basis: φ_0 は $\mathscr{H}$ へ入れない．φ_1 は $\mathscr{H}$ へ入れる．

Induction Step: Induction Hypothesis として

$$\varphi_\beta \qquad (\beta < \alpha) \qquad \cdots\cdots②$$

についてはすでにこれらの関数が $\mathscr{H}$ に属するか否かが決定されているとする．

$$\exists \varphi_{\beta_1}, \varphi_{\beta_2}, \cdots, \varphi_{\beta_m} \in \mathscr{H} \ (\beta_i < \alpha)\ \exists r_1, r_2, \cdots, r_m \in \mathscr{R}:$$
$$\varphi_\alpha = r_1\varphi_{\beta_1} + r_2\varphi_{\beta_2} + \cdots + r_m\varphi_{\beta_m}$$

ならば φ_α は $\mathscr{H}$ へ入れない．そうでなければ $\mathscr{H}$ へ入れる．

以上で $\mathscr{H}$ が定義された．φ_n の定義から，$\varphi_n \in \mathscr{H}$ for all $n \geq 1$.

このとき

Claim 1)　任意有限個の $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m \in \mathscr{H}$ に対して

$$r_1\zeta_1 + r_2\zeta_2 + \cdots + r_m\zeta_m \equiv 0 \implies r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0.$$

証明　$r_1\varphi_{\alpha_1} + r_2\varphi_{\alpha_2} + \cdots + r_m\varphi_{\alpha_m} \equiv 0$, $\varphi_{\alpha_i} \in \mathscr{H}$，$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$ とすると $\{\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \cdots, \varphi_{\alpha_{m-1}}\} \subseteq \{\varphi_\beta : \beta < \alpha_m\}$ である．

もし $r_m \neq 0$ ならば

$$\varphi_{\alpha_m} = -(r_1/r_m)\varphi_{\alpha_1} - \cdots - (r_{m-1}/r_m)\varphi_{\alpha_{m-1}}$$

であるから，$\mathscr{H}$ の構成の stage α_m で φ_{α_m} は $\mathscr{H}$ から除外されているはずである．

これは不合理.

$$\therefore \quad r_m = 0. \qquad \therefore \quad r_1\varphi_{\alpha_1} + r_2\varphi_{\alpha_2} + \cdots + r_{m-1}\varphi_{\alpha_{m-1}} \equiv 0$$

再び同じ議論によって $r_{m-1} = 0$ を得る. 以下同様にして結局

$$r_i = 0 \quad \text{for all } i = 1, 2, \cdots, m \qquad \square$$

Claim 2) 任意の $\varphi \in \mathscr{D}$ に対して

$$\exists \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m \in \mathscr{H} \ \exists r_1, r_2, \cdots, r_m \in \mathscr{R} :$$
$$\varphi = r_1\zeta_1 + r_2\zeta_2 + \cdots + r_m\zeta_m \qquad \cdots\cdots③$$

証明 任意に $\varphi_\alpha \in \mathscr{D}$ をとる. $\varphi_\alpha \in \mathscr{H}$ ならば明らか. よって $\varphi_\alpha \notin \mathscr{H}$ とする. そのとき $\alpha_i < \alpha$ なる或る $\varphi_{\alpha_i} \in \mathscr{H}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ と或る実数 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ とをもって

$$\varphi_\alpha = r_1\varphi_{\alpha_1} + r_2\varphi_{\alpha_2} + \cdots + r_m\varphi_{\alpha_m}$$

と表すことができる. (なぜなら, もしこのように表すことが不可能ならば, 構成の stage α で $\varphi_\alpha \in \mathscr{H}$ となっているはず. これは仮定に反する.) $\square$

さて, 所要の擬連続でない線形汎関数 T の定義は次のとおりである:

(i) $\zeta \in \mathscr{H}$ に対して $T(\zeta)$ は何 (ただし $\neq 0$) でもよい. ここでは $=1$ とする.

(ii) $\varphi = r_1\zeta_1 + r_2\zeta_2 + \cdots + r_m\zeta_m$, $\zeta_i \in \mathscr{H}$ に対しては

$$T(\varphi) = r_1T(\zeta_1) + r_2T(\zeta_2) + \cdots + r_mT(\zeta_m)$$

と定める. 特に $T(\varphi_0) = 0$ である.

このとき

Claim 3) T は線形である.

証明 任意に $\eta, \xi \in \mathscr{D}$ をとる. 係数 0 を含めれば, 同一の $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m \in \mathscr{H}$ をもって

$$\eta = r_1\zeta_1 + r_2\zeta_2 + \cdots + r_m\zeta_m$$
$$\xi = s_1\zeta_1 + s_2\zeta_2 + \cdots + s_m\zeta_m$$

と表すことができる. このとき

$$\eta + \xi = (r_1 + s_1)\zeta_1 + \cdots + (r_m + s_m)\zeta_m$$

であるから

$$\begin{aligned} T(\eta + \xi) &= (r_1 + s_1)T(\zeta_1) + \cdots + (r_m + s_m)T(\zeta_m) \\ &= T(\eta) + T(\xi) \end{aligned}$$

また，$T(r\eta) = rT(\eta)$ も同様にして示される．

ゆえに，T は線形汎関数である．□

Claim 4)　T は擬連続でない．

証明　$\mathscr{H}$ の ω-型の始切片は $\{\varphi_n : n \in \omega,\ n \neq 0\}$ である．定義により

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(k)} = 0 \quad \text{for all } k \geq 0$$

であることがわかる．これに対して，T の定義から

$$T(\varphi_n) = 1 \quad \text{for all } n$$

ゆえに，T は擬連続でない．□

かくして**擬連続でない線形汎関数**，すなわち**超関数でない線形汎関数**の存在が選択公理を使って証明された．

文　献

Schwartz, L.（吉田耕作・渡辺二郎訳）：物理数学の方法，岩波書店 (1966)，特に p. 68.

辻 正次，集合論，共立出版 (1946，初版 1934)，特に pp. 94–98.

XII. 選択公理不要の定理

ここへ選択公理不要の定理を三つあげておこう．孤立点をもたない閉集合を**完全集合**という．

1)　$\mathscr{R}$ の完全部分集合は連続の濃度をもつ．

2)　$\mathscr{R}$ の完全部分集合たち全体は連続の濃度をもつ．

3)　可分距離空間は第 2 可算公理をみたす，すなわち可算開基をもつ．(これの逆の証明には可算選択公理が必要になる．)

XIII. p.236 の補題 3 の証明

まず，次の補題を準備する．

補題 3′　補題 3 と同じ前提条件のもとで，$\mathrm{cf}^M = \mathrm{cf}^{M[G]}$.

ここで，cf を説明する．二つの順序数 $\alpha > \beta$ について，$u \subseteq \alpha$ で，u は α で非有界 (i.e., $\bigcup u = \alpha$) かつ $\langle u, \in\rangle \cong \langle \beta, \in\rangle$（同形）なる u が存在するとき，β は α と**共終** (cofinal) であるといい，u は α の**共終部分集合** (cofinal subset) という．

例．$\omega = \aleph_0$ は $\aleph_\omega$ と共終である．$u = \{\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_n, \cdots\}$ ととればよい．

α と共終な最小の順序数を α の**共終数**といい $\mathrm{cf}(\alpha)$ で表す．$\mathrm{cf}(\alpha)$ は常に基数，しかも正則基数である ([15, p.124] 参照)．なお，$\mathrm{cf}(\alpha) = 0$ iff $\alpha = 0$ であり，$\mathrm{cf}(\alpha+1) = 1$ であるから，以下では極限順序数についてのみ cf を考える．そこで

$$S_\alpha = \{\,\beta : \beta{<}\alpha \wedge \exists f\,[f : \beta \longrightarrow \alpha \wedge \bigcup \mathrm{rng}(f) = \alpha\,]\,\}$$

とおけば $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{least}\ S_\alpha$ である．あの f は単調増大としてよい．かかる f を**共終写像** (cofinal map) という．

「補題 3′ → 補題 3」の証明　$M \subseteq M[G]$ だから $\mathrm{Card}^M \supseteq \mathrm{Card}^{M[G]}$．よって，反対向きの $\subseteq$ を証明する．そのため $\kappa > \omega$ を M の任意の基数とする ($\kappa = \omega$ は絶対的だから考えないでよい)．もし $\mathrm{cf}^M(\kappa) = \kappa$ ならば，補題 3′ により $\mathrm{cf}^{M[G]}(\kappa) = \kappa$ となるから，κ は $M[G]$ の基数である．そこで $\mathrm{cf}^M(\kappa) < \kappa$ とし，$\mathrm{cf}^M(\kappa) = \lambda$ とおくと，再び補題 3′ により $\mathrm{cf}^{M[G]}(\kappa) = \lambda < \kappa$．そして $M[G]$ において共終写像 $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ がある．ここで f の値を基数に限定できる ($f(\gamma)$ $(\gamma < \beta)$ の代わりに $f(\gamma)$ の次の**基数** $f(\gamma)^+$ を使えばよい)．$M[G]$ において $\kappa = \sup\{f(\beta) : \beta < \lambda\}$ であるから，基数たちの極限として κ は $M[G]$ の基数である．□

補題 3′ の証明　S_α は Σ_1-形であるから，$M \subseteq M[G]$ より $S_\alpha^M \subseteq S_\alpha^{M[G]}$．よって P の選び方に関係なく，$\alpha \in M \cap \mathrm{OR}$ ならば $\mathrm{cf}^M(\alpha) \geq \mathrm{cf}^{M[G]}(\alpha)$．ゆえに，

$$P \text{ が c.c.c. をみたすならば } \mathrm{cf}^M(\alpha) \leq \mathrm{cf}^{M[G]}(\alpha) \text{ が成り立つ}$$

ことを示せばよい．$\mathrm{cf}^M(\alpha) = \omega$ のときは OK．なぜなら，もし $\mathrm{cf}^{M[G]}(\alpha) < \omega$ ならば $\mathrm{cf}^{M[G]}(\alpha) = 1$，よって α は $M[G]$ の後者数．しかし基数は極限数であり，M の極限数は $M[G]$ でも極限数であるから不合理．ゆえに $\mathrm{cf}^{M[G]}(\alpha) \geq \omega$ となり，あの不等式が

成り立つ．したがって，$\mathrm{cf}^M(\alpha) \geq \aleph_1^M$ の場合を考えればよい．そこで $\mathrm{cf}^{M[G]}(\alpha) = \lambda$ とおくと，λ は $M[G]$ の基数であり，したがって M の基数でもある．$M[G]$ において基数 λ から α の或る共終部分集合への全単射があるから，それを $f \in M[G]$ とし，その名前を $\underline{f} \in M^{(B)}$ とする．そのとき真理性補題 24.5 (p.207) により，このことを強制する forcing condition が G の中にある，すなわち

$$p_0 \Vdash \text{“}\underline{f} : \check{\lambda} \longrightarrow \check{\alpha} \wedge \bigcup \mathrm{rng}(\underline{f}) = \check{\alpha}\text{”} \text{ となる } p_0 \in G \text{ がある.}$$

そこで

$$b = \{\gamma < \alpha : \exists \beta < \lambda\, \exists p \in P\,(p \Vdash \underline{f}(\check{\beta}) = \check{\gamma})\}$$

を作れば，ここに現れる文字はすべて M の要素を表し，しかも forcing 関係 $\Vdash$ は M で定義可能であるから，$b \in M$．ところで $M[G]$ において $\sigma < \lambda$, $f(\sigma) = \tau$ ならば，再び真理性補題 24.5 により，$\exists p \in G\,(p \Vdash \underline{f}(\check{\sigma}) = \check{\tau})$．よって，$b$ の定義により $\tau \in b$．すなわち $\mathrm{rng}(f) \subseteq b$．$\mathrm{rng}(f)$ は α の共終部分集合であり，$b \in M$ であるから，このことは b が M において α の共終部分集合であることを意味する．よって最小性から $\mathrm{cf}^M(\alpha) \leq |b|^M$．このとき

Claim　$|b|^M \leq \lambda$.

〔**証**．各 $\beta < \lambda$ に対して $b_\beta = \{\gamma < \alpha : \exists p \in P\,(p \Vdash \underline{f}(\check{\beta}) = \check{\gamma})\}$ とおくと，$b = \bigcup\{b_\beta : \beta < \lambda\}$．各 $\beta < \lambda$ に対して $\gamma \in b_\beta$ を考える．これに対して $p_\gamma \Vdash \underline{f}(\check{\beta}) = \check{\gamma}$ となる $p_\gamma \in P$ がある．もし

(☆)　　$\gamma \neq \delta$ ならば p_γ, p_δ は不両立 (incompatible) である

がいえるならば，P が c.c.c. をみたすという仮定から，p_γ たちは可算個しかないので，$|b_\beta|^M \leq \aleph_0$．$\therefore$ $|b|^M \leq \aleph_0 \cdot \lambda = \lambda$ となって Claim が成り立つ．よって，(☆) を示せばよい．もし $\gamma \neq \delta$ であるが p_γ と p_δ が compatible となることがあれば，$q \leq p_\gamma$ かつ $q \leq p_\delta$ となる $q \in P$ がある．定理 24.4 (ix) により

$$q \Vdash \underline{f}(\check{\beta}) = \check{\gamma} \text{ かつ } q \Vdash \underline{f}(\check{\beta}) = \check{\delta}.$$

よって，$q \in G'$ なる P における M-生成的フィルター G' をとると ([15, 定理 7.24])，定理 24.5 により

$$M[G'] \Vdash \underline{f}(\check{\beta}) = \check{\gamma} \wedge \underline{f}(\check{\beta}) = \check{\delta}, \text{ すなわち } M[G'] \Vdash \check{\gamma} = \check{\delta}. \quad \therefore\ \gamma = \delta.$$

これは不合理．よって (☆) が成り立つ．Claim の証明終わり．〕

これにより $\mathrm{cf}^M(\alpha) \leq |b|^M \leq \lambda = \mathrm{cf}^{M[G]}(\alpha)$．これで補題 3′ が証明された．□

したがって補題 3 が成立する．

参考文献

[1] Bell, J. L., *Boolean-valued models and independence proofs in set theory*, Oxford Univ. Press (1977).

[2] Borel, E., *Leçon sur la theorie des fonctions*, Paris (1898), 第4版 (1950).

[3] Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen* (E. Zermelo 編), Berlin (1932), Hildesheim (1966)——[部分訳：功力金二郎・村田全，超限集合論，共立出版(1979)].

[4] Heijenoort, Jean van, *From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic*, 1879–1931, Harvard Univ. Press (1967).

[5] Jech, T., *The Axiom of choice*, North-Holland (1973).

[6] Moore, G. H., *Zermelo's axiom of choice, its origins, development, and influence*, Springer-Verlag (1982).

以上6冊は，執筆に際しかなり頻繁に参考にさせていただいた単行本であり，ここに感謝の意を表する次第である．次に掲げるのは本文中で引用した邦文の文献である．

[7] 日本数学会編，数学辞典，岩波書店 (1985).

[8] 秋月康夫・鈴木通夫，高等代数学 I，岩波全書 (1952).

[9] クロスリー他；田中尚夫訳，現代数理論理学入門，共立出版 (1977).

[10] コッペルベルク；広瀬健監訳・渕野昌訳，現代のブール代数，共立出版 (1986).

[11] 志賀浩二，バナッハ-タルスキーの逆理 I, II，数学セミナー，1985年11, 12月号.

[12] 竹内外史，現代集合論入門，日本評論社 (1971).

[13] 田中尚夫，決定性公理に関する最近までの諸結果について，日本数学会，数学，第29巻 (1977), 53–64.

[14] ——，記述集合論概観，月刊マセマティクス，SYMPOSIUM 2，数学基礎論第7項 (1980), 146–153.

[15] ——，公理的集合論，培風館 (1982).

[16] デデキント；河野伊三郎訳，数について，岩波文庫 (1961).

[17] 西村敏男・難波完爾，公理的集合論，共立出版 (1985).

[18] 広瀬健，計算論，朝倉書店 (1975).

[19] ファン・デル・ヴェルデン；銀林浩訳，現代代数学 I, II, III，東京図書(1959–60).

この他に，

彌永昌吉，現代数学の基礎概念（上），弘文堂 (1944)

は，本文で引用はしなかったが，筆者の若いころの愛読書であって，執筆中もたいへん参考にさせていただいた本である．本文に述べたカントルのいくつかの言葉の引用は，すでにこの本の中で取り扱われている．また，

高木貞治，数学雑談，共立出版（1935, 1970）

には，整列定理のツェルメロによる証明がすでに紹介されている．

次にあげるのは，本文で引用した諸論文および単行本である．

[20] Alexandroff, P., Sur la puissance des ensambles mesurables B, *C. R. Paris*, **162** (1916), 323−325.

[21] Baire, R., Sur les fonctions de variables réelles, *Annali di matematica pura ed applicata*, **3** (1899), 1−123.

[22] Baire, R; Borel, E; Hadamard, J; Lebesgue, H., Cinq lettres sur la théorie des ensembles, *Bulletin de la Société mathématique de France*, **33** (1905), 261−273.

[23] Banach, S., Sur le problème de la measure, *Fund. Math.*, **4** (1923), 7−33.

[24] Banach, S; Kuratowski, C., Sur une généralisation du problème de la mea-sure, *Fund. Math.*, **14** (1929), 127−131.

[25] Banach, S; Tarski, A., Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fund. Math.*, **6** (1924), 244−277.

[26] Blass, A., Existence of bases implies the axiom of choice, *Contemporary Math.*, **31** (1984), 31−33.

[27] Borel, E., Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles, *Math. Ann.*, **60** (1905), 194−195.

[28] Cipolla, M., Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni, *Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturale in Catania* (5), **6** (1913), 1−13.

[29] Cohen, P. J., The independence of the continuum hypothesis, I, *Proc. N. A. S.* (USA), **50** (1963), 1143−1148; II, *Proc. N. A. S.* (USA), **51** (1964), 105−110.

[30] Fraenkel, A. A., Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre *Math. Ann.*, **86** (1922), 230−237.

[31] Gödel, K., The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis, *Proc. N. A. S.* (USA), **24** (1938), 556−557.

[32] ——, The consistency of the axiom of choice and of the generalized contin-uum-hypothesis with the axioms of set theory, *Annals of Math. Studies*, No. 3, Princeton Univ. Press (1940).

[33] ——, *Collected Works, I 1929−36*, Oxford Univ. Press (1986).

[34] Hamel, E., Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funk-tionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Ann.*, **60** (1905), 459−462.

[35] Hartogs, F., Über das Problem der Wohlordnung, *Math. Ann.*, **76** (1915), 436−443.

[36] Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Leibzig (1914) (Reprinted New York, Chelsea (1965)).

[37] ——, Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen, *Math. Ann.*, **77** (1916), 430−

437.

[38] ——, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, *Crelle Journ.*, **167** (1932), 294−311.

[39] Heine, E., Die Elemente der Funktionenlehre, *Crelle Journ.*, **74** (1872), 172 −188.

[40] Jech, T., *Set Theory*, Academic Press (1978).

[41] Kelley, J. L., The Tychonoff Product theorem implies the axiom of choice, *Fund. Math.*, **37** (1950), 75−76.

[42] Kuratowski, C., *Topology I*, Academic Press (1966).

[43] Lebesgue, H., Intégrale, longueur, aire, *Annali di matematica pura ed applicata* (3), **7** (1902), 231−359. (邦訳あり)

[44] ——, Sur les fonctions représentables analytiquement, *Journal de Math.*, **6** série 1 (1905), 139−216.

[45] Łos, J.; Ryll-Nardzewski, C., On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs, *Fund. Math.*, **38** (1951), 233−237.

[46] Peano, G., The principles of arithmetic, presented by a new method (1889), in Heijenoort (＝文献 [4]).

[47] Scott, D., Definitions by abstraction in axiomatic set theory, *Bulletin A. M. S.*, **61** (1955), 442.

[48] Sierpinski, W., Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo dans l'analyse moderne, *C. R. Paris*, **163** (1916), 688−691.

[49] ——, L'axiom de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse, *Bulletin de l'Academie des Sciences de Cracovie*, Classe des Sciences Math., Série A (1918), 97−152.

[50] Skolem, Th., Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Helsingfors での数学会 (1922年7月4日 ～ 7日) の報告 (1923), 217−232 (in [4]).

[51] Tarski, A., Une contribution à la théorie de la measure, *Fund. Math.*, **15** (1930), 42−50.

[52] Tychonoff, A., Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.*, **102** (1930), 544−561.

[53] Urysohn, P., Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.*, **94** (1925), 262−295.

[54] von Neumann, J., Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Crelle Journ.*, **154** (1925), 219−240.

[55] ——, Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre, *Crelle Journ.*, **160** (1929), 227−241.

[56] Wagon, S., *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge Univ. Press (1985).

[57] Zermelo, E., Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (aus einem

an Herrn Hilbert gerichten Briefe), *Math. Ann.*, **59** (1904), 514–516.

[58] ——, Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.*, **65** (1908), 107–128.

[59] ——, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, *Math. Ann.*, **65** (1908), 261–281.

[60] ——, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche, *Fund. Math.*, **16** (1930), 29–47.

[61] Zorn, M., A remark on method in transfinite algebra, *Bulletin A. M. S.*, **41** (1935), 667–670.

[62] Lusin, N., *Leçon sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris (1930).

[63] Solovay, R., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Ann. Math.*, **92** (1970), 1–56.

[64] Stone, M. H., The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. A. M. S.*, **40** (1936), 37–111.

[65] Tukey, J. W., Convergence and uniformity in topology, *Annals of Math. Studies*, No.2, Princeton Univ. Press (1940).

[66] Vitali, G., *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna (1905).

以上の他に，本文では直接引用しなかったが，次の文献がある．

[67] 近藤基吉，選択公理，日本数学会，数学，第 17 巻 (1965)，13–27.

[68] Hallett, M., *Cantorian set theory and limitation of size*, Oxford Univ. Press (1984).

[69] Rubin, H; Rubin, J. E., *Equivalents of the axiom of choice*, North-Holland, I (1963), II (1985).

補充文献

[DL 1998] Di Prisco, C. A., Larson, J. A., et al., *Set theory, Techniques and Applications*, Kluwer Acad Publ. (1998), 226 pp.

[Dr 1991] Drucker, T. (Ed.), *Perspectives on the history of mathematical logic*, Birkhäuser (1991), 195 pp.

[HR 1998] Howerd, P., and Rubin, J. E., Consequences of the axiom of choice, *Math. Surveys and Monographs*, Amer. Math. Soc., **59** (1998), 432 pp.

[Ko 1938 a] Kondo, M., Sur l'uniformisation des complementaires analytiques et les ensembles projectifs de la seconde class, *Japanese Journ. Math.* **15** (1938), 197−230.

[Ko 1938 b] 近藤基吉, 解析集合論, 大阪帝国大学数学講演集, 岩波書店 (1938), 101 pp.

[Lu 1930] Lusin, N., Sur le probleme de M. Jacques Hadamard d'unifomi-sation des ensembles, *Extra Din Mathematica*, **IV** (1930), 54−66.

[MM 1992] 前原昭二・本橋信義訳, ゲーデルを語る, 遊星社 (1992), 158 pp.

[MN 1991] Meschkowski, H., and Nilson, W., *Georg Cantor Briefe*, Springer-Verlag (1991), 535 pp.

[Mo 1980] Moschovakis, Y. N., *Descritive set theory*, North-Holland (1980), 637 pp.

[Ta 1997] 田中尚夫, 計算論理入門, 裳華房 (1997), 194 pp.

増補版あとがき

初版が発行されて3年後第2刷の際に，何人かの方々からのご注意を参考に多少の修正を加えることができ，ミスはほとんどなくなったように思う．しかし，いろいろな書き落としは免れることができず，内心忸怩たるものがあった．その一部分でも書き加えることができればよいがと，かねがね思っていた次第である．幸いにこの度増補版が出せることになり，望みが現実のものとなった．

まず第一に気がかりであったことは，本文中「これは選択公理が必要」ということをしばしば書きながら，なぜ必要なのか，すなわち，選択公理がなければ当該の命題が成立しないということについては，述べる余裕がなかったことである．そこで，最初にこのような一例を記して，この懸案を解消した．第二は，筆者が育った近藤基吉研究室の基本テーマである「集合の一意化」について語りたかったことである．これはいわゆる effective choice ――「選択公理によらない具体的選択」の研究である．出発点はあの五つの手紙のうちのアダマールのものである．これについて大まかな様子を述べることができた．第三は連続体仮説の独立性についてである．これは選択公理とは直接関係ないが，強制法やブール代数値モデルの方法で証明できるものであり，これらの方法は本文にかなり詳しく述べてあるので，それを利用できるという利点がある，というのが理由である．しかし，やむをえず多少他の文献を引用したところもある．その他若干の話題を書き加えて，増補版とした．

初版を読んで有益なご注意を下さった方々にお礼を申し上げます．特に，当時東京大学大学院理論物理学専攻の学生であった白井郁男氏に感謝します．また，増補版を企画して下さった遊星社に感謝します．

1999年7月　　著　者

増訂版あとがき

今回幸いに増訂版が発行できるというので，急遽手直しを行なった．主な改訂は，五つの手紙の翻訳のおかしなところを多少改善したこと，超関数でない線形汎関数の実例を示したこと，および，連続体仮説の独立性の証明で，前回省いてしまった「基数不変」の補題3の証明を付け加えたこと，の3点である．特に，超関数でない線形汎関数の例を加えた経緯は補遺 XI の冒頭に述べた．

まだまだおかしなところや誤謬は免れないと思うので，読者からのご注意をいただければありがたいと思います．

快く増ページを承知してくださり，またいろいろお世話になった遊星社の西原昌幸氏に感謝します．

2005年8月

著　者

人 名 表

Addison, J. W. (1930–) アディソン
Alexandroff, P. S. (1896–1982) アレクサンドロフ
Aristoteles (384–322 B.C.) アリストテレス
Artin, E. (1898–1962) アルティン
Baire, R. (1874–1932) ベール
Banach, S. (1892–1945) バナッハ
Barwise, K. (1942–2000) バーワィズ
Bernstein, F. (1878–1956) ベルンシュタイン
Blass, A. (1947–) ブラス
Böhm, Annett; Joseph; Ludwig; Maria ベーム
Bolzano, B. (1781–1848) ボルツァノ
Boole, G. (1815–1864) ブール
Borel, E. (1871–1956) ボレル
Brahms, J. (1833–1897) ブラームス
Burali-Forti, C. (1861–1931) ブラリ・フォルティ
Cantor, Constantin; Georg Waldemar; Sophie カントル
Cantor, G. (1845–1918) カントル
Cauchy, A. (1789–1857) コーシー
Čech, E. (1893–1960) チェック
Chang, C. C. (1927–) チャン
Cipolla, M. (1880–1947) チポラ
Cohen, P. J. (1934–) コーエン
Dedekind, R. (1831–1916) デデキント
Drach, J. (1871–1941) ドラッハ
Feferman, S. (1928–) フィファマン
Fraenkel, A. A. (1891–1965) フレンケル
Fréchet, M. (1878–1973) フレシェ
Frege, G. (1848–1925) フレーゲ
Gaifman, H. ガイフマン
Gauss, C. F. (1777–1855) ガウス
Gödel, K. (1906–1978) ゲーデル
Hadamard, J. (1865–1963) アダマール
Hahn, H. (1879–1934) ハーン
Hamel, G. (1877–1954) ハーメル
Hartogs, F. (1874–1943) ハルトークス
Hausdorff, F. (1868–1942) ハウスドルフ
Heine, E. (1821–1881) ハイネ
Henkin, L. (1921–) ヘンキン
Hilbert, D. (1862–1943) ヒルベルト
Hitler, A. (1889–1945) ヒトラー
Jech, T. (1944–) イエック
Joachim, J. (1831–1907) ヨアヒム
Keisler, H. J. (1936–) キースラー
Kelley, J. L. (1916–1999) ケリー
Kleene, S. C. (1909–1994) クリーネ
Kronecker, L. (1823–1891) クロネッカー
Kummer, E. (1810–1893) クンマー
Kuratowski, C. (1896–1980) クラトウスキー
Lebesgue, H. (1875–1941) ルベーグ
Leibniz, G. W. F. (1646–1716) ライプニッツ

Levi, B. (1875–1961) レヴィ
Łos, J. (1920–1998) ウォシュ
Lusin, N. (1883–1950) ルージン
Martin, D. A. (1941–) マーチン
Montague, R. (1930–1971) モンタギュ
Moschovakis, Y. N. (1938–) モシュコヴァキス
Mostowski, A. (1913–1975) モストウスキー
Peano, G. (1858–1932) ペアノ
Poincaré, H. (1854–1912) ポアンカレ
Riemann, B. (1826–1866) リーマン
Robinson, J. (1919–1985) ロビンソン
Russell, B. (1872–1970) ラッセル
Ryll-Nardzewski, C. (1926–) リール・ナルジェフスキー
Sacks, G. E. (1933–) サックス
Schreier, O. (1901–1929) シュライアー
Schröder, E. (1841–1902) シュレーダー
Scott, D. (1932–) スコット
Shelah, S. (1945–) シェラー
Sierpiński, W. (1882–1969) シールピンスキー
Skolem, Th. (1887–1963) スコーレム
Souslin, M. (1894–1919) ススリン
Steiniz, E. (1871–1928) シュタイニッツ
Stone, M. H. (1903–1989) ストーン
Szilard, L. (1898–1964) シラード
Takeuti, G. (1926–) 竹内外史
Tannery, J. (1848–1910) タンヌリ
Tarski, A. (1902–1983) タルスキー
Tychonoff, A. (1906–1993) チコノフ
Urysohn, P. (1898–1924) ウリゾーン
Vaught, R. L. (1926–2002) ヴォート
Vitali, G. (1875–1932) ヴィタリ
von Neumann, J. (1903–1957) フォン・ノイマン
Weierstrass, K. (1815–1897) ワイエルシュトラス
Wigner, E. (1902–1997) ウィグナー
Woodin, H. (1955–) ウッディーン
Zermelo, E. (1871–1953) ツェルメロ
Zorn, M. (1906–1993) ツォルン(ゾーン)

補遺の中の人名

Kondo, M. (1906–1980) 近藤基吉
Levy, A. (1936–) レヴィ
Motohashi, N. (1943–) 本橋信義
Richard, J. (1862–1956) リシャール
Schwartz, L. (1915–2002) シュワルツ
Shoenfield, J. R. (1927–2000) ショーンフィールド
Solovay, R. M. (1938–) ソロベイ
Steel, J. スチール
Tsukada, N. (1942–) 塚田信高

◎ Kleene のカタカナ表記について

アメリカの大学で数年前 Kleene の孫 (computer science 専攻) を教えたことのある日本人から直接聞いたところによると，“クリーニィ” が一番近い表記である，ということである．その人の講義中にしばしば Kleene という名前が出てきたので，彼はちょっと困惑気味であったという．

記 号 表

$\in$ 19, 151
$\{\ \}$ 20, 155
$\subseteq$ 20, 155
$=$ 20, 151
$\subsetneqq$ 20
$\cup$ 21, 155
$\cap$ 21
ϕ 21, 156
$-$ 21
$\neg$ 21
^{c} 21
$\oplus$ 21, 136
$\subset$ 21
$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}$ 23
$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}$ 23
$\forall$ 24, 151, 215
$\exists$ 24, 151, 215
$\wedge$ 24, 151, 215
$\vee$ 24, 151, 215
$\Longrightarrow, \rightarrow$ 24, 151, 215
$\neg$ 24, 151, 215
$\{\ :\ \}$ 25, 156
$\bigcup$ 25, 155
$\exists a\in A$ 26
$\forall a\in A$ 26
$\exists!$ 26
$f:A\longrightarrow B$ 27
$\longmapsto$ 27
rng 27, 81
$\sim$ 27
$=$ 27
ω 28, 162
$\mathscr{R}^n$ 31
$\leq$ 32
$\mathfrak{P}$ 38, 155
$\mathscr{R}$ 10, 31
I 38
${}^{\omega}\mathscr{R}$ 39
${}^{\omega}\omega$ 39
π 39
π_1, π_2 40
$\mathfrak{P}_\omega$ 40
$P^{(n)}$ 41
$P^{(\infty)}$ 41
∞ 41
$\aleph_0$ 49
$Z(\ )$ 49, 50
$\aleph_\nu$ 50
ω_ν 50
$\beth$ 51
Ω 51
$\prod$ 53, 114
$\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ 55, 57
$\aleph$ 75
$2^{\aleph}$ 75
$\prec$ 80
dom 81
DC(α) 81
DC 81
CH 90
m 91
$|\ |$ 91
m^* 91

(AC 1) 95
(CAC) 96
$^{-}$ 103
$\mathscr{B}_\alpha, \mathscr{B}$ 110
$2^{\aleph_0}$ 113
P_λ 117
$\vdash$ 121, 219
$'$ 134
BPI 134
/ 136
[ ] 137, 201
$\models$ 141, 218
$\mathscr{L}$ 151
⟨ , ⟩ 155
ZF, ZFC 161
Z, ZC 161
Trans 162
0, 1, 2, … 162
Ord 162
OR 162
$\alpha+1$ 162
rank 164
Def 165
L_α, L 166
$V=L$ 167, 168
φ^M 168
⋏ 169
Od 171
$<^n_\beta$ 171
$\restriction$ 172, 220
$<_\alpha$ 172
Cons 173
(CTM) 174
M 174
$+, \cdot, -$ 174
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$ 174
$M_\alpha^{(B)}, M^{(B)}$ 175
$^\vee$ 175
ρ 175
$\| \ \|$ 176
$<$ 176
i_G 191
$M[G]$ 191
$\underline{G}$ 192
$\underline{x}$ 192
$f``u$ 196
$M_\Gamma^{(B)}$ 197
N 197, 209
u^i, u^-, u^c 201
RO(P) 202
$H(\omega\times\omega, 2)$ 202
e 204
$\Vdash$ 205
fix 209
$\mathscr{S}$ 215
$\underset{\sim}{P}_i^{(k)}$ 215
$\mathscr{C}$ 215
v_i 151, 216
$\mathscr{F}(\mathscr{S},\mathscr{C})$ 216
$\mathscr{F}^{=}(\mathscr{S},\mathscr{C})$ 217
$\langle M, V\rangle$ 218
$G`x$ 221
X^ω 221
$G(A,X)$ 222
AD 223
GCH 223

補遺の中の記号

$\mathbf{\Delta}^1_n$ 228
$\mathbf{\Pi}^1_n$ 228
$\mathbf{\Sigma}^1_n$ 228
Con 232
Card 235
DO 238
KW 238
O 238

索　　引

本文に原語が記してある項目には
そのページ数字に＊印をつけた．

●ア行

値　value　27
アトム　atom　161
アルティン－シュライアーの定理　139
アレフ数　aleph number　50
1－項述語　unary predicate　24
1対1　one-to-one　27
1－要素集合　singleton, one-element set　20, 155
一意化　uniformisation　228
一次独立　lineary independent　123
一般連続体仮説　generalized continuum hypothesis　223
イデアル　ideal　132
遺伝的対称名前　hereditarily symmetric name　197
遺伝的に有限　hereditarily finite　164
宇宙　universe　163, 218
ウリゾーンの補題　101
エフェクティヴ記述集合論　effective descriptive set theory　227
エフェクティヴに計算できる関数　effectively calculable function　79
演繹定理　deduction theorem　232

●カ行

外延　extension　25
外延公理　axiom of extensionality　154
開核（順序位相の）　interior　202
開かつ閉な集合　203*
解釈　interpretation　191, 218
開集合（順序位相の）　open set　201
階数　rank　164
解析集合　analytic set　228
階層定理（ボレル集合の）　hierarchy theorem on Borel sets　110
拡大　extension　125
可算（開）基　countable (open) base　105
可算加法性　countable additivity　91
可算鎖条件　countable chain condition (c. c. c.)　236
可算集合　countable set　33
可算推移モデル　174*
可算選択公理　countable axiom of choice　36
可算部分集合定理　33, 94
可算和定理　37, 98
可分　separable　122*
可測基数　measurable cardinal　146
関数　function　27, 220
完全加法的測度　completely additive measure　90
完全性定理　completeness theorem　219
完備（ブール代数の）　complete　175
記号系　set of symbols　151
奇順序数　odd ordinal number　109
基数　cardinal number　28, 41
基数3分法　56*, 57
基礎モデル　ground model　174
基底　base　123
基底公理　axiom of foundation　160
帰納の段階　171*
基本列　fundamental sequence　16
強制概念　forcing notion　201
強制条件　forcing condition　201

強制する　force　205
強制法　forcing method　201
共通部分　intersection　21
極限数　limit number　162
極大イデアル　maximal ideal　133
極大イデアルの弱定理　137
極大元　maximal element　114
極大原理　maximal principle　115, 116
拠点（帰納法の）　171*
距離関数　distance function　103
空集合　empty set　21
空集合公理　empty set axiom　154
偶順序数　even ordinal number　109
クラス　class　46, 158
クラトウスキー空間　101
形成規則　formation rule　151, 216
決定性　determined　222
決定性公理　axiom of determinateness　223
決定不能　undecidable　168
結論　conclusion　156
ゲーデル化　165*
ゲーム　game　222
原子的（ブール代数の）　atomic　191
原子論理式　atomic formula　151, 216
健全性定理　soundness theorem　219
限定作用素　quantifier　24, 215
項　term　216
後者　successor　162
構成可能集合　constructible set　166
構成可能性公理　axiom of constructibility　168
構造　structure　163, 218
個体定数　individual constant　216
個体変数　individual variable　216
固有変数　eigen variable　217
近藤の一意化定理　Kondo's uniformisation theorem　229
コンパクト　compact　104
コンパクト性定理　compactness theorem　139, 219

●サ行

差　difference　21
鎖　chain　114
最大元　maximum element　115
最大原理　maximum principle　194
策戦　strategy　222
作用域（限定作用素の）　scope　216
自己同型　automorphism　195
始切片　initial segment　45
実体　real field　138
自明な（極大イデアル）　trivial　133
射影　projection　117
射影決定性公理　axiom of projective determinacy　230
射影集合　projective set　228
弱置換公理（図式）　weak axiom (schema) of replacement　183
写像　mapping　27
主イデアル（単項イデアル）　principal ideal　133
集合　set　18*, 19*
集合算　operation on sets　20
集合族　family of sets　22
集合論言語　language for set theory　151
集合論の公理系　154
終集合　codomain　27
集積点　accumulating point　104
従属選択公理　81*
自由な項　term free (for a variable)　217
自由変数　free variable　152, 216
述語記号　predicate letter　215
順序位相　order topology　201
順序型　order type　45
順序構造　order structure　43
順序集合　partially ordered set　43

順序数　ordinal number　42, 45, 46*, 162
順序体　ordered field　138
順序対　ordered pair　155
上界　upper bound　114
商代数　quotient algebra　136
真部分集合　proper subset　20
真理性補題　truth lemma　193, 207
推移的　transitive　162
推移法則　transitive law　27, 43, 153
推論規則　rule of inference　217
数学的帰納法による定義　definition by recursion (recursive definition)　96
スコットのトリック　100*, 184
スコーレム主義　Skolemism　234
スコーレムの逆理　Skolem's paradox　85
ストーンの表現定理　137
正規（部分群の集合のフィルターが）　197
正規空間　normal space　101
生成的拡大　generic extension　191
生成的超フィルター　generic ultra-filter　189
正則開集合　regular open set　202
正則性公理　axiom of regularity　154
整列集合　42*, 48
整列定理　well-ordering theorem　52
線形順序　linear order　42
潜在的無限　18*
全射　surjection　27
全称化規則　rule of generalization　217
全称閉包　universal closure　153, 219
選択関数　choice function　8
選択公理　7*, 8*, 95, 154
選択公理の独立性　173, 207
選択公理の無矛盾性　147, 170
選択集合　choice set　8
全単射　bijection　27
前提　premise　156
疎　nondence　106*
素イデアル　prime ideal　134
像　image　27
双射　bijection　27
相対化　relativization　168
相対無矛盾性　relative consistency　147
束　lattice　132
束の極大イデアル定理　133
束縛変数　bounded variable　152, 216
存在化規則　rule of specialization　217

●タ行

体　field　137
第 i 級順序数（$i=1,2,3$）　i-th number class　49, 50
第１階述語論理　first order predicate calculus　215
第１（第２）類　first (second) category　107
対角線論法　diagonal argument　37
対称拡大　symmetric extension　198, 209
対称差　symmetric difference　21, 109, 136
対称部分モデル　symmetric submodel　195, 198
対称法則　symmetric law　153
代数的実数　algebraic real number　29
代数的閉包　algebraic closure　137
第２可算公理　second countable axiom　105
代入法則　substitution rule　153
互いに素　mutually exclusive　21
妥当　valid　219

値域　range　27
置換公理（図式）　axiom (schema) of replacement　154
チコノフの定理　114
超越数　transcendental (real) number　29
超記号　metasymbol　152
超限　18*
超限帰納法　transfinite induction　171
超限帰納法による定義　definition by transfinite recursion　220
超限順序数　38, 46*
超数学　metamathematics　173
直積位相　product topology　114
対関数　pairing function　39
対公理　pairing axiom　154
対集合　pairing set　155
ツェルメロ－フレンケルの集合論　151
ツォルンの補題　115
定義域　domain　27
定義可能　definable　164
定義式　defining formula　156
定数記号　constant symbol　215
デデキント無限　Dedekind infinite　35, 97, 214
デデキント有限　Dedekind finite　35, 97, 214
テューキーの補題　116
等号公理　axiom of equality　153, 217
同値関係　equivalence relation　27
同値類　equivalent class　137
同等（対等）　equivalent　27

●ナ行

内部モデル　inner model　173
内包　intension　25
名前　name　192
2値測度　two-valued measure　146
濃度　power　28

●ハ行

排他和　exclusive or　136
ハウスドルフに関するチコノフの定理　125
ハウスドルフの逆理　144
ハウスドルフの分割　Hausdorff's partition　143
バナッハ－タルスキーの逆理　147
ハーメル基　Hamel basis　60, 124
反射法則　reflexive law　43, 153
反対称法則　antisymmetric law　43
ハーン－バナッハの拡張定理　125
反例モデル　counter model　219
非可算集合　uncountable set　33
非可述的　60*
非可測集合　nonmeasurable set　92
非実無限　18*
非自明な自己同型　195
非自明な束　nontrivial lattice　133
非主イデアル　nonprincipal ideal　133
必勝法　winning strategy　222
非反射法則　antireflexive law　42
標準生成的超フィルター　canonical generic ultrafilter　192
標準名前　canonical name　208
不完全性定理　incompleteness theorem　233
付値　valuation　218
部分基（準基）　subbase　114
ブラリ・フォルティの逆理　60, 75
不両立　incompatible　236
ブール代数　Boolean algebra　44, 134
ブール代数の素イデアル定理　134
ブール値関数　Boolean valued function　175
ブール値モデル　Boolean valued model　177
ブール値モデルの基本定理　180
文　sentence　153, 216

分出（分離）公理（図式） axiom (schema) of separation (Aussonderngs-axiom) 156
分配法則 distributive law 134
分離規則 rule of separation 217
閉包 closure 103
閉包（順序位相の） closure 202
閉論理式 closed formula 153, 216
ベキ集合（公理） power set (axiom) 154, 155
ベールのカテゴリー定理 107
ベールの性質 property of Baire 109
補解析集合 co-analytic set 228
補元 complement 134
補集合 complement 21
ほとんど宇宙的 almost universal 199
ボレル階層 Borel hierarchy 110
本来のイデアル proper ideal 132

●マ行

無原子的 atomless 191
無限集合 infinite set 29
無限（集合）公理 axiom of infinity 35, 154
無矛盾性定理 consistency theorem 219
モーダス・ポーネンス modus ponens 217
モデル model 163, 218

●ヤ行

やせ集合 107*
有限加法性 finite additivity 143
有限基数 finite cardinal 49
有限交叉性 finite intersection property 116
有限集合 finite set 29
有限順序数 finite ordinal 46, 49
有限性 116*
要素 element 19

●ラ行・ワ行

ラッセルの逆理（二律背反） Russell's paradox 150, 157
両立的 compatible 204
累積的階層 accumulating hierarchy 163
連続体仮説 continuum hypothesis 31, 113
連続体問題 31*
連続の濃度 power of the continuum 113
論理式 formula 151, 216
論理的妥当性 logical validity 177
論理的連結詞 logical connective 24, 215
和集合 sum set, union 21, 155
和集合公理 sum set axiom 154
割当 53*

●その他

B-階数 B-rank 175
B-妥当 B-valid 177
basic Cohen モデル 226
γ-集合 γ-set 53
Γ-対称 Γ-symmetric 197
Δ-形(論理式) Δ-form(ula) 236
Δ_0-論理式 Δ_0-formula 198
ε-帰納法 ε-recursion 175
L-階数 L-rank, constructible order 171
lightface 227
M-生成的 M-generic 203
M-稠密 M-dense 204
Σ_1-形(論理式) Σ_1-form(ula) 236
T_1-位相空間 T_1 topological space 101
T_2-空間 T_2-space, Hausdorff space 113
T_4-分離公理 T_4 separation axiom 101

著者紹介

田中尚夫 (たなか・ひさお)

1928 年　山梨県に生まれる

1962 年　東京都立大学大学院修了

現　在　法政大学名誉教授．理学博士

著　書　『ブルバキ集合論 3』(共訳，東京図書)
『現代数理論理学入門』(訳と解説，共立出版)
『工科系のための微分積分学』(共著，裳華房)
『公理的集合論』(培風館)
『計算論理入門』(裳華房)

選択公理と数学【増訂版】――発生と論争，そして確立への道

1987 年 5 月 17 日　初 版 第 1 刷発行
1999 年 9 月 13 日　増補版第 1 刷発行
2005 年 10 月 1 日　増訂版第 1 刷発行

定価はカバーに
表示しています

著　者　田中尚夫
発行者　西原昌幸
発行所　遊 星 社
164-0001 東京都中野区中野 3 丁目 50-1
電話 (03)3381-5914　振替 00140-5-137657
発売元　星 雲 社
112-0012 東京都文京区大塚 3 丁目 21-10
電話 (03)3947-1021　Fax (03)3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　　ISBN4-434-06805-9